# АЛИАСИНГ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ЧАСТИЦЫ

# В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ

А.М.Заславский

Рассматриваются условия возникновения и некоторые следствия физического явления, которое может быть обнаружено при наблюдении частиц высоких энергий в том (и только в том) случае, если время имеет дискретную природу. Это явление (aliasing effect) заключается в подмене волновой функции частицы при субсветовых скоростях её движения вследствие дискретности времени. Алиасинг волновой функции ограничивает энергетический спектр частицы и порождает аномальные формы её движения, сопровождающиеся уменьшением кинетической энергии до нуля при увеличении скорости до некоторого фиксированного значения. Не исключено, что именно этими аномалиями можно будет объяснить такие проблемы как парадокс ГЗК и проблему скрытой массы.
Учитывая, что необходимым условием алиасинга является дискретность времени, рассматриваемый эффект, в случае его экспериментального подтверждения, может служить доказательством этой дискретности.

## Введение

Вопрос о том, является ли время непрерывным или оно дискретно, не может быть окончательно решён на основании одних лишь спекулятивных рассуждений. Необходим некий решающий эксперимент, который бы расставил точки над «и». В данной работе на основании гипотезы о дискретности времени предсказывается и исследуется физическое явление, которое может служить базой для подобного эксперимента.
Свободная частица, движущаяся в пространстве, рассматривается как пуассоновский поток событий (мгновенных состояний частицы), разделённых случайными сколь угодно малыми, но отличными от нуля интервалами времени. Эти интервалы, характеризуя частоту следования событий, в среднем оказываются функционально связанными со скоростью движения частицы. Когда достигается скорость, при которой средняя частота следования мгновенных состояний частицы становится меньше двойной частоты волновой функции, возникает, согласно известной теореме отсчётов Найквиста – Котельникова – Шеннона, явление подмены частоты (aliasing effect). Надо сказать, что явление подмены частоты давно известно в практике обработки сигналов. Однако в отношении фундаментальных физических проблем оно не исследовалось. Можно предположить, что этому имеется, по крайней мере, две причины. Во-первых, на сегодняшний день при тех уровнях энергии, которые достигаются в экспериментах с элементарными частицами, ничего подобного не наблюдалось, во-вторых, доминирующее в физике, представление о непрерывности времени исключает это явление как естественное. Но уровни энергии, которые достигаются в экспериментах с элементарными частицами, растут, и если, наконец, будет достигнут тот уровень, при котором, всё же, обнаружится алиасинг волновой функции, это будет означать необходимость пересмотра концепции времени.

**Принцип относительности для потоков событий**

В теории случайных процессов потоком называют случайную последовательность мгновенных событий. В качестве таких событий будем рассматривать состояния объекта наблюдения. Под состоянием будем понимать «абстрактный термин, обозначающий множество стабильных значений переменных параметров объекта»[1]. В классической механике состояние характеризуется координатами точки в фазовом пространстве, в квантовой механике – параметрами волновой функции. При этом множеству состояний определённого объекта однозначно соответствует некоторое подмножество моментов времени. Рассмотрим промежуток времени, разделяющий смежные (следующие непосредственно друг за другом) мгновенные состояния наблюдаемой системы. В теории относительности, например, такими событиями являются вспышки света. Предположим, что за время между двумя указанными событиями какие-либо иные события, доступные восприятию наблюдателя (включая события в лабораторных часах), не происходили. Спрашивается, можно ли подобные промежутки времени измерить, судить о том, какой промежуток больше, а какой меньше? Иными словами, обладает ли промежуток времени между смежными событиями априорной длительностью? Как в классических, так и в релятивистских теориях исходным является предположение о том, что поток событий – Время обладает бесконечно большой плотностью. Поэтому во всех физических рассуждениях, где присутствует время, промежуток между двумя заданными событиями характеризуется определённой длительностью независимо от наполнения его иными наблюдаемыми событиями. Хотя за этим предположением могут стоять самые различные представления о времени, de facto оно делает время субстанциальным. Множество моментов времени как некая особая субстанция (подобно эфиру) существуют здесь независимо от наличия или отсутствия событий, происходящих в наблюдаемых системах.

В данной работе исследуется альтернативная (событийная) концепция, согласно которой время измеряется количеством всех событий, регистрируемых наблюдателем. Согласно этой концепции время не обладает априорной длительностью. Длительность промежутка времени, заключённого между двумя заданными событиями, измеряется количеством всех событий, зафиксированных наблюдателем на этом промежутке. Если же на рассматриваемом промежутке наблюдатель не фиксирует ни одного события, кроме начального и конечного, которыми определён промежуток, то такой промежуток считается элементарным и его длительность принимается равной некоторой фундаментальной константе. Пусть $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ множества состояний наблюдаемых систем. Цепь событий, включающая все состояния этих множеств $S \subseteq S_1 \bigcup S_2 \bigcup S_3 \bigcup, \ldots, \bigcup S_n$, является временем данного наблюдателя. Когда наблюдатель сопоставляет некоторую наблюдаемую цепь событий с той, которая для него является временем, он идентифицирует наблюдаемую последовательность как поток событий объекта наблюдения. Промежутки времени между любыми состояниями наблюдаемой системы измеряются количеством, заключённых между ними элементарных промежутков. В другом случае (относительно иного наблюдателя) та цепь событий, которую мы только что назвали временем, может рассматриваться в качестве наблюдаемого потока событий относительно иной цепи событий – времени вновь выбранного наблюдателя.

Таким образом, в зависимости от того, какая система является наблюдателем, одна и та же последовательность событий может рассматриваться либо как время, либо как поток событий во времени.

Продолжительность элементарного промежутка времени $\Delta t_0 > 0$ между двумя смежными мгновенными событиями той последовательности, которая для заданного наблюдателя

[1] http://ru.wikipedia.org/wiki/Состояние

является временем, будем считать константой, не зависящей от выбора наблюдателя, так как величина этого промежутка, согласно событийной концепции времени, не может быть получена прямым измерением

$$\forall \Delta t \left( 0 < \Delta t_0 \le \Delta t,\ \Delta t_0 = const \right), \tag{1}$$

$$\Delta t = \Delta t_0 \tau \tag{2}$$

Выражения (1), (2) являются в событийной концепции времени математической формулировкой принципа относительности для потоков событий. Согласно ему длительности $\Delta t_1$ и $\Delta t_2$ двух любых промежутков времени, измеренных любыми наблюдателями при наблюдении любых систем равны друг другу $\Delta t_1(\tau) = \Delta t_2(\tau) = \Delta t_0 \tau$, если на каждом из указанных промежутков происходит одинаковое количество ($\tau + 1$) элементарных событий. Если же на сравниваемых промежутках времени произошло различное количество событий, то и длительности этих промежутков с точки зрения событийной концепции времени не равны друг другу.

Объектом нашего внимания в данной работе будут пуассоновские потоки, обладающие двумя ключевыми свойствами: ординарностью и отсутствием последействия. Подобные потоки можно рассматривать как результат сложения множества независимых ординарных потоков. В теории случайных процессов доказывается, что при таком сложении исчезает последействие, имеющее место в исходных потоках и результирующий поток становится пуассоновским. В частном случае при постоянной плотности пуассоновский поток называется простейшим. Ординарность потока означает отсутствие в нём одновременных событий. Пусть, например, объектом наблюдения является последовательность состояний некоторой системы как целого. Так как в каждый момент времени система оказывается только в одном каком-либо состоянии, поток её состояний является ординарным.

Уточним понятие сложения потоков событий. Если имеется два потока $S_1$ и $S_2$, то их суммой называется поток $S$, в котором моменты времени появления событий состоят из моментов появления событий в потоках $S_1$ и $S_2$. В теории случайных процессов [1] доказывается, что при сложении ординарных потоков событий суммарный поток также будет ординарным. Например, такие потоки как поток дождевых капель или поток машин при многорядном движении или поток отказов сложной системы, состоящей из нескольких элементов, являя собою сумму ординарных потоков, также являются ординарными. На первый взгляд подобное утверждение кажется спорным, так как считается возможным одновременный отказ нескольких элементов или одновременное пересечение несколькими автомобилями некоторой условной линии. Однако это лишь дань нашим неточным ощущениям. Допуская возможность одновременных событий (неординарность суммарного потока), мы предполагаем, что случайная величина – интервал времени между событиями является непрерывной случайной величиной, которая может принимать любое значение, в том числе равное нулю. Тем не менее, доказано [2], что вероятность каждого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю. Следовательно, равна нулю и вероятность точного совпадения значений, принятых двумя независимыми случайными величинами. Этим в теории случайных процессов доказывается ординарность суммарного потока событий сложной системы.

Условимся величины, относящиеся к объекту наблюдения отмечать индексом $k$, а величины, относящиеся к наблюдателю писать без индекса. Обозначим $\tau_k(t, \Delta t)$ случайное количество состояний объекта наблюдения, отображённых наблюдателем на промежутке времени $(t, t + \Delta t)$. Ряд распределения этой случайной величины имеет вид

$$\tau_k(t,\Delta t):\left|\frac{0}{p_0^k(t,\Delta t)}\right|\left|\frac{1}{p_1^k(t,\Delta t)}\right|\left|\frac{\ldots}{\ldots}\right|, \tag{3}$$

где в столбце с многоточиями стоят сверху возможные значения количеств событий 2, 3, …, а внизу – соответствующие им вероятности. Для любой пары $(t,\Delta t)$ выполняется условие нормировки

$$p_0^k(t,\Delta t)+p_1^k(t,\Delta t)+p_2^k(t,\Delta t)+\ldots=1. \tag{4}$$

Математическое ожидание случайной величины $\tau_k(t,\Delta t)$ равно сумме

$$\mathrm{M}\left[\tau_k(t,\Delta t)\right]=0\cdot p_0^k(t,\Delta t)+1\cdot p_1^k(t,\Delta t)+2\cdot p_2^k(t,\Delta t)+\ldots\ . \tag{5}$$

В случае ординарного потока при $\Delta t\to 0$ вероятность обнаружения двух и более событий на интервале $\Delta t$ стремится к нулю. Следовательно, математическое ожидание случайной величины $\tau_k(t,\Delta t)$ в пределе стремится к величине

$$\mu\left[\tau_k(t,\Delta t)\right]=\lim_{\Delta t\to 0}M\left[\tau_k(t,\Delta t)\right]=\lim_{\Delta t\to 0}p_1^k(t,\Delta t)$$

Собственное время объекта наблюдения, согласно принципу относительности для потоков событий, найдём аналогично (1) с той разницей, что вместо количества событий $\tau$, воспринимаемых наблюдателем как моменты собственного времени, подставим математическое ожидание $\mu\left[\tau_k(t,\Delta t)\right]$ количества состояний объекта наблюдения, воспринятых наблюдателем на промежутке времени $(t,t+\Delta t)$.

$$\Delta t_k=\Delta t_0\mu\left[\tau_k(t,\Delta t)\right]. \tag{6}$$

Найдём для ординарного потока величину отношения собственных времён объекта наблюдения и наблюдателя $\Delta t_k/\Delta t$

$$\frac{\Delta t_k}{\Delta t}=\Delta t_0\frac{\mu\left[\tau_k(t,\Delta t)\right]}{\Delta t}=\Delta t_0\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_1^k(t,\Delta t)}{\Delta t}. \tag{7}$$

Величина $\sigma(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{p_1^k(t,\Delta t)}{\Delta t}$ в теории случайных процессов называется плотностью (интенсивностью) ординарного потока событий. Она представляет собой среднее число событий, приходящихся на единицу времени, на участке $\Delta t$, примыкающем к текущему моменту времени $t$. Следовательно, выражение (7) можно представить в виде

$$\frac{\Delta t_k}{\Delta t}=\Delta t_0\sigma(t). \tag{8}$$

Оценим отношение промежутков собственного времени объекта наблюдения и наблюдателя. Для этого воспользуемся определением промежутка времени $\Delta t_0$ как наименьшего возможного между двумя смежными состояниями любой системы. В связи с тем, что в (7) величина $\Delta t_0$, согласно определению (1), меньше числа, стоящего в знаменателе, получим $\dfrac{\Delta t_k}{\Delta t}\le\lim\limits_{\Delta t\to 0}p_1^k(t,\Delta t)\le 1$.

Данное неравенство означает, что собственное время объекта наблюдения течёт не быстрее времени наблюдателя. В том случае, когда на каждом промежутке времени $\Delta t_0$ наблюдатель с вероятность 1 обнаруживает мгновенное состояние объекта наблюдения, это означает, что их времена текут одинаково. Если же $\lim\limits_{\Delta t\to 0}p_1^k(t,\Delta t)<1$, время наблюдаемого объекта течёт медленнее времени наблюдателя.

Пусть объектом наблюдения является частица, движущаяся относительно инерциальной системы отсчёта со скоростью $\left|\mathbf{V}\right| \le c$. В этом случае отношение собственного времени объекта наблюдения ко времени наблюдателя, как известно, равно

$$\frac{\Delta t_k}{\Delta t} = \sqrt{1-\frac{\mathbf{V}^2}{c^2}} \le 1. \tag{9}$$

Специальная теория относительности устанавливает функциональную связь (9) промежутков собственных времён наблюдателя и объекта наблюдения с относительной скоростью движения объекта наблюдения независимо от наполнения этих промежутков времени событиями.

Принцип относительности для потоков событий, учитывая наполнение времени событиями, устанавливает функциональную связь (8) промежутков собственных времён наблюдателя и объекта наблюдения с плотностью потока событий объекта наблюдения.

Таким образом, скорость движения в пространстве и плотность потока мгновенных состояний являются параметрами, характеризующими один и тот же объект – частицу. Сравнивая (8) и (9), получим формулу, связывающую плотность потока событий наблюдаемой частицы со скоростью её движения в инерциальной системе отсчёта

$$\sigma\left(\mathbf{V}\right) = \frac{1}{\Delta t_0}\sqrt{1-\frac{\mathbf{V}^2}{c^2}} \tag{10}$$

Из этой формулы видно, что среднее количество событий движущейся частицы, приходящихся на единицу времени, уменьшается с увеличением её скорости. Когда наблюдаемая частица неподвижна относительно наблюдателя, плотность потока её событий равна плотности времени наблюдателя. Это означает, что на каждом элементарном промежутке времени наблюдатель фиксирует мгновенное состояние наблюдаемой частицы. С увеличением скорости движения частицы, её мгновенные состояния фиксируются наблюдателем не на каждом элементарном промежутке. При достижении предельной скорости движения мгновенные состояния частицы не фиксируются наблюдателем ни на одном элементарном промежутке времени.

### Подмена частоты частицы

В квантовой механике состояние свободно движущейся частицы описывается волновой функцией

$$\psi\left(\mathbf{r},t\right) = Ce^{j(\omega t-\mathbf{kr})} = A\left(\mathbf{r}\right)e^{j(\omega t)}, \tag{11}$$

где $\omega = 2\pi\nu$ - частота волны, $\mathbf{r}$ - радиус-вектор произвольной точки пространства, $t$ - время, $\mathbf{k}$ - волновой вектор. Частота и волновой вектор связаны с энергией и импульсом частицы известными соотношениями $E=\hbar\omega,\ \ \mathbf{p}=\hbar\mathbf{k}$.

В потоке событий, которым может быть представлена частица, её мгновенные состояния $\psi\left(\mathbf{r},t_1\right),\psi\left(\mathbf{r},t_2\right),\psi\left(\mathbf{r},t_3\right),\ldots.$ разделены случайными промежутками времени $\left(t_2-t_1\right),\left(t_3-t_2\right),\ldots.$

В пуассоновском потоке средняя продолжительность промежутка между мгновенными состояниями равна $\Delta\overline{t} = \sigma^{-1}$, где $\sigma$ - плотность потока событий. Если считать время непрерывным ($\Delta t_0 = 0$), и плотность потока состояний частицы бесконечно большой, то формула (11) описывает состояния частицы при любом значении частоты $\omega$. Если же

время дискретно ($\Delta t_0 > 0$), а именно на этом базируется событийная концепция, то, с очевидностью $\Delta \overline{t} > 0$ и (11) адекватно описывает волновую функцию, лишь при частотах, не превышающих частоту Найквиста $F$. Это положение в отношении периодических функций доказывается известной теоремой отсчётов.
Частота Найквиста в данном случае равна одной второй интенсивности потока событий. Согласно теореме Котельникова – Шеннона ограничение, накладываемое на частоту $\omega$, имеет вид

$$\frac{\omega}{2\pi} \le F = \frac{\sigma}{2}. \tag{12}$$

Подставляя значение $\sigma$ из (10), получаем неравенство

$$\frac{1}{\Delta t_0}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \ge \frac{\omega}{\pi}. \tag{13}$$

Откуда следует

$$\frac{|\mathbf{V}|}{c} \le \sqrt{1-\frac{\omega^2}{\pi^2}\Delta t_0^2} \tag{14}$$

Полученный результат можно интерпретировать следующим образом. До тех пор пока скорость частицы не превышает величину

$$c_F = c\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\pi^2}\Delta t_0^2}, \tag{15}$$

волновая функция, характеризующаяся частотой $\omega$, может быть однозначно восстановлена по дискретному ряду её мгновенных значений, следующих друг за другом с интенсивностью $\sigma = \frac{1}{\Delta t_0}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$.

Посмотрим теперь, что произойдёт при превышении частицей скорости $c_F$.
Воспользовавшись приёмом, изложенным в [2], выразим время наблюдения $t$ через средний период следования мгновенных состояний частицы в потоке событий
$t = \frac{\tau}{\sigma}, \quad \tau = 0,1,2,\ldots$.

$$\psi = A(\mathbf{r})e^{j\frac{2\pi\nu}{\sigma}\tau}, \tag{16}$$

а также представим отношение $\frac{2\nu}{\sigma}$ в виде суммы целой $z$ и дробной $q$ частей:

$$\frac{2\nu}{\sigma} = z + q. \tag{17}$$

Волновая функция при этом преобразуется к виду

$$\psi = A(\mathbf{r})e^{j\pi z\tau}e^{j\pi q\tau}. \tag{18}$$

Теперь в зависимости от чётности или нечётности числа $z$ имеется две возможности.
1. Если $z$ - чётное, то $e^{j\pi z\tau} = 1$ для всех $\tau$, что соответствует повороту вектора $\psi$ на комплексной плоскости на угол, кратный $2\pi$.

2. Если $z$ - нечётное, то $e^{j\pi z\tau}=\left(-1\right)^{\tau}$ для всех $\tau$, что соответствует повороту вектора $\psi$ на комплексной плоскости на угол, кратный $\pi$.
Угол $\pi q\tau$ для первого случая перепишем в виде

$$\pi q\tau=\left(\omega-\pi\sigma z\right)\frac{\tau}{\sigma}=\omega'' t,\ \ \mathrm{z}=0,2,4,\dots. \tag{19}$$

Учитывая, что $\frac{\tau}{\sigma}=t$ получаем, что частота $\omega=2\pi\nu$ подменяется частотой

$$\omega''=\omega-\pi\sigma z=\omega-\frac{\pi}{\Delta t_0}z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}},\ \ \mathrm{z}=0,2,4,\dots \tag{20}$$

Во втором случае примем во внимание следующее: $\left(-1\right)^{\tau}=\cos\left(\pi\tau\right),\quad \sin\left(\pi\tau\right)\equiv 0$.
Представим комплексное число $e^{j\pi z\tau}e^{j\pi q\tau}$ в тригонометрической форме, дополнив его заведомо нулевыми слагаемыми

$$\begin{aligned}
e^{j\pi z\tau}e^{j\pi q\tau}&=\cos\left(\pi\tau\right)\cos\left(\pi q\tau\right)+j\cos\left(\pi\tau\right)\sin\left(\pi q\tau\right)+\\
&+\sin\left(\pi\tau\right)\sin\left(\pi q\tau\right)-j\sin\left(\pi\tau\right)\cos\left(\pi q\tau\right)=\\
&=\cos\left(\pi\tau\left(1-q\right)\right)-j\sin\left(\pi\tau\left(1-q\right)\right)
\end{aligned}$$

Следовательно, для нечётных $z$ имеем

$$e^{j\pi z\tau}e^{j\pi q\tau}=e^{-j\pi\tau\left(1-q\right)}$$

Угол $\pi\tau\left(1-q\right)$ перепишем в виде

$$\pi\tau\left(1-q\right)=\left(\pi\sigma-\left(\omega-\pi\sigma z\right)\right)\frac{\tau}{\sigma}=\left(2\pi F-\omega'\right)t,\ \ \mathrm{z}=1,3,\dots.$$

В этом случае частота волны подменяется частотой

$$\omega'=2\pi F-\omega''\ =2\pi F-\omega+\frac{\pi}{\Delta t_0}z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}},\ \ \mathrm{z}=1,3,\dots, \tag{21}$$

при $z=1$ получим

$$\omega'=\frac{2\pi}{\Delta t_0}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}-\omega. \tag{22}$$

Таким образом, видно, что при снижении плотности потока событий наблюдаемой частицы в связи с увеличением её скорости до критического значения $\sigma=2F=\frac{\omega}{\pi}$ происходит подмена частоты (энергии). На графике зависимости частоты от скорости (рис.1) линия частоты не уходит монотонно в бесконечность, а «сминается в складки». Именно этим обусловлено традиционное обозначение частоты Найквиста буквой F (от англ. Fold – складка). Вследствие этого явления в наблюдаемом спектре частот могут появляться частоты, соответствующие энергиям, отличным от той энергии частицы, которую можно было бы наблюдать, если бы плотность потока её событий была бесконечно большой и не уменьшалась с увеличением скорости частицы.

Рассмотрим зависимость частоты (энергии) свободной частицы от скорости движения с учётом ограниченной плотности потока её мгновенных состояний.

Энергия и частота свободной частицы массой $m$ в инерциальной системе отсчёта, как известно, равны $E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$, $\omega = \dfrac{mc^2}{\hbar\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$. Пусть скорость частицы увеличивается и достигает значения $c_F$ (22). Дальнейшее увеличение скорости приведёт к подмене частоты согласно (22). Из равенства при скорости $|\mathbf{V}| = c_F$ исходной частоты и частоты подмены

$$\frac{mc^2}{\hbar\sqrt{1-\left(\frac{c_F}{c}\right)^2}} = \frac{\pi}{\Delta t_0}\sqrt{1-\left(\frac{c_F}{c}\right)^2}\,, \tag{23}$$

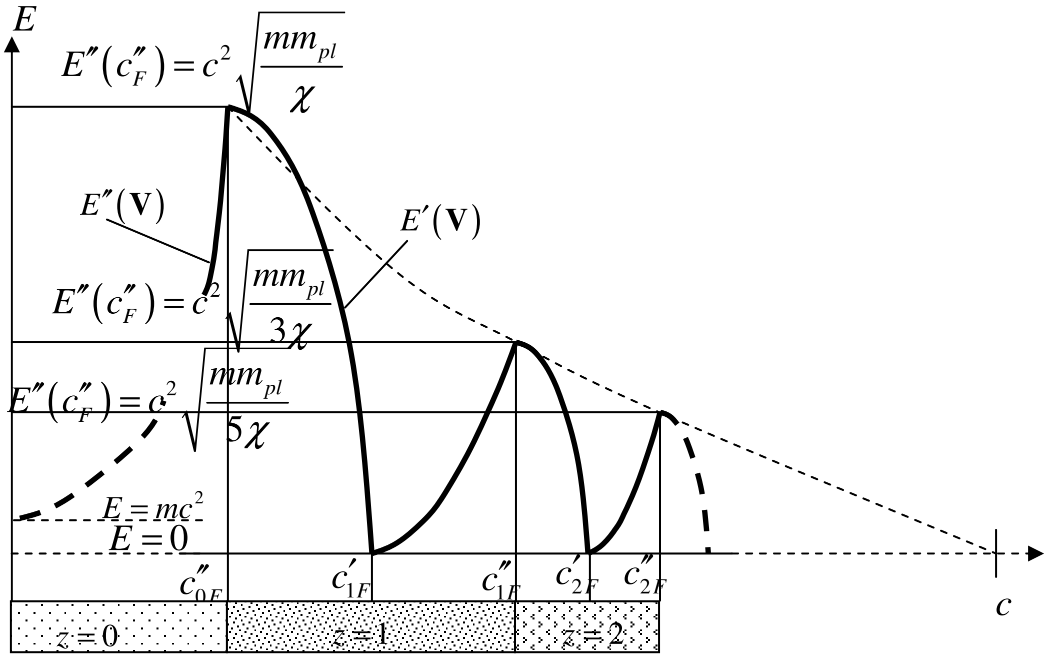


Рис.1. Особенности энергетического спектра ультрарелятивистской частицы, обусловленные подменой частоты

получим

$$\frac{c_F}{c} = \sqrt{1-\frac{mc^2}{\pi\hbar}\Delta t_0}\,. \tag{24}$$

Так как в этом уравнении число в левой части заведомо действительное, то имеет место неравенство

$$\frac{mc^2}{\pi\hbar}\Delta t_0 \le 1 \tag{25}$$

Умножим и разделим левую часть этого неравенства на $t_{pl}$, где величина

$t_{pl} = \sqrt{\dfrac{\hbar G}{c^5}} = 5{,}39056 \cdot 10^{-44} s$ - планковское время, а также учтём, что

величина $\sqrt{\dfrac{\hbar c}{G}} = \dfrac{\hbar}{c^2 t_{pl}} = m_{pl} = 2{,}17671 \cdot 10^{-8} kg$ - планковская масса.

Тогда неравенство (25) преобразуется к виду

$$\frac{m}{m_{pl}} \frac{\Delta t_0}{\pi t_{pl}} \leq 1 \tag{26}$$

Согласно гипотезе, выдвинутой в 1956г. М.А.Марковым [3] планковская масса является верхним пределом масс элементарных частиц.

$$\frac{m}{m_{pl}} \leq 1. \tag{27}$$

В предельном случае $m = m_{pl}$. Следовательно, в предельном случае должно иметь место

неравенство $\dfrac{\Delta t_0}{\pi t_{pl}} \leq 1$. Но величина $\Delta t_0$ по определению константа, следовательно, если

верна гипотеза М.А.Маркова, то это неравенство должно выполняться не только в предельном, но и во всех случаях.

Обозначим

$$\chi = \frac{\Delta t_0}{\pi t_{pl}} \leq 1 \tag{28}$$

безразмерную константу, указывающую отношение элементарного промежутка времени $\Delta t_0$ к приведенному планковскому времени $\pi t_{pl}$.

С учётом (28) выражение (24) для критической скорости частицы, при которой возникает алиасинг, упрощается

$$\frac{c_F}{c} = \sqrt{1 - \chi \frac{m}{m_{pl}}}. \tag{29}$$

Если скорость частицы увеличивается сверх значения $c_F$, то её частота (энергия) с точки зрения неподвижного наблюдателя уменьшается вследствие подмены частоты, как это видно из (21), вопреки ожидаемому увеличению.

Используя сквозную нумерацию $z = 0,1,2,3,\ldots$, получим для чётных $z'' = 2z$ складок величину подменной частоты

$$\omega'' = \omega - \frac{\pi}{\Delta t_0} 2z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \quad \mathrm{z} = 0,1,2,3,\ldots \tag{30}$$

Величина подменной частоты для нечётных $z' = 2z \pm 1$ складок равна

$$\omega' = 2\pi F - \omega + \frac{\pi}{\Delta t_0}(2z \pm 1)\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \quad \mathrm{z} = 0,1,2,3,\ldots \tag{31}$$

Найдём скорости движения частицы в точках сопряжения складок. Обозначим $c''_{zF}$ критическую скорость в точке перехода чётной складки в нечётную, а $c'_{zF}$ - критическую скорость в точке перехода нечётной складки в чётную. Условием сопряжения при

переходе от чётной $z''=0,2,4,...$ к нечётной $z'=1,3,5,...$ складке является равенство $\omega''\left(c''_{zF}\right)=\omega'\left(c''_{zF}\right)$. Условием сопряжения при переходе от нечётной $z'=1,3,5,...$ к чётной $z''=0,2,4,...$ складке является равенство $\omega'\left(c'_{zF}\right)=\omega''\left(c'_{zF}\right)$.
Соответствующие уравнения имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{mc^2}{\hbar\sqrt{1-\left(\dfrac{c''_{zF}}{c}\right)^2}}-\dfrac{\pi}{\Delta t_0}2z\sqrt{1-\dfrac{c''^2_{zF}}{c^2}}=2\pi F'\left(c''_{zF}\right)-\dfrac{mc^2}{\hbar\sqrt{1-\left(\dfrac{c''_{zF}}{c}\right)^2}}+\dfrac{\pi}{\Delta t_0}\left(2z+1\right)\sqrt{1-\dfrac{c''^2_{zF}}{c^2}}, \\ z=0,1,2,3,... \\ \dfrac{mc^2}{\hbar\sqrt{1-\left(\dfrac{c'_{zF}}{c}\right)^2}}-\dfrac{\pi}{\Delta t_0}2z\sqrt{1-\dfrac{c'^2_{zF}}{c^2}}=2\pi F'\left(c'_{zF}\right)-\dfrac{mc^2}{\hbar\sqrt{1-\left(\dfrac{c'_{zF}}{c}\right)^2}}+\dfrac{\pi}{\Delta t_0}\left(2z-1\right)\sqrt{1-\dfrac{c'^2_{zF}}{c^2}}, \\ z=1,2,3,4... \end{cases}$$

Принимая во внимание (10) и (12), имеем $2\pi F\left(c_{zF}\right)=\dfrac{\pi}{\Delta t_0}\sqrt{1-\left(\dfrac{c_{zF}}{c}\right)^2}$ .

С учётом этого равенства исходные уравнения приводятся к виду

$$\begin{cases} \dfrac{2mc^2}{\hbar\sqrt{1-\left(\dfrac{c''_{zF}}{c}\right)^2}}-\left(4z+2\right)\dfrac{\pi}{\Delta t_0}\sqrt{1-\dfrac{c''^2_{zF}}{c^2}}=0, \quad z=0,1,2,3,... \\ \dfrac{2mc^2}{\hbar\sqrt{1-\left(\dfrac{c''_{zF}}{c}\right)^2}}-4z\dfrac{\pi}{\Delta t_0}\sqrt{1-\dfrac{c''^2_{zF}}{c^2}}=0, \quad z=1,2,3,4... \end{cases}$$

Подставляя сюда $\Delta t_0=\chi\pi t_{pl}=\dfrac{\pi\chi\hbar}{c^2 m_{pl}}$ из (28), получим

$$\frac{c''_{zF}}{c}=\sqrt{1-\frac{\chi}{2z+1}\frac{m}{m_{pl}}}, \quad z=0,1,2,..., \tag{32}$$

$$\frac{c'_{zF}}{c}=\sqrt{1-\frac{\chi}{2z}\frac{m}{m_{pl}}}, \quad z=1,2,3,... \tag{33}$$

Найдём теперь значения частоты (энергии) в точках сопряжения складок

$$\omega''\left(c''_{zF}\right)=\omega'\left(c''_{zF}\right)=\frac{mc^2}{\hbar\sqrt{\dfrac{\chi}{2z+1}\dfrac{m}{m_{pl}}}}-\frac{\pi}{\Delta t_0}2z\sqrt{\frac{\chi}{2z+1}\frac{m}{m_{pl}}}= \tag{34}$$

$$=\frac{c^2}{\hbar}\sqrt{\frac{mm_{pl}}{\chi\left(2z+1\right)}}, \quad z=0,1,2,...,$$

$$\omega'\left(c'_{zF}\right)=\omega''\left(c'_{zF}\right)=\frac{mc^2}{\hbar\sqrt{\frac{\chi}{2z}\frac{m}{m_{pl}}}}-\frac{\pi}{\Delta t_0}2z\sqrt{\frac{\chi}{2z}\frac{m}{m_{pl}}}=0,\quad z=1,2,3,... \tag{35}$$

Во всех точках перехода нечётной складки в чётную энергия частицы обращается в нуль.

Наибольшее значение энергия частицы имеет в точке сопряжения нулевой и первой складок, т.е. при $z=0$

$$E_{\sup}=c^2\sqrt{\frac{mm_{pl}}{\chi}} \tag{36}$$

На рис. 2 показано семейство графиков энергии для частиц различной массы.

.

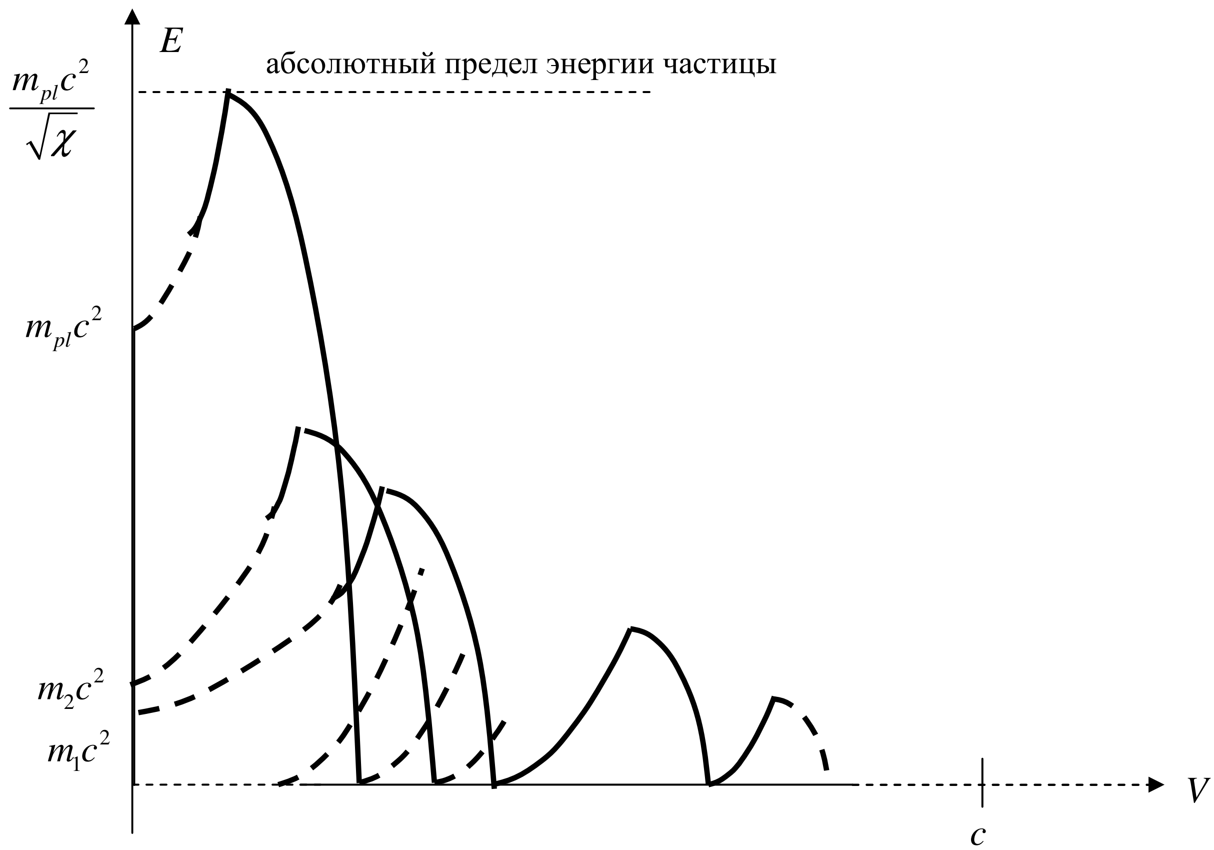


Рис.2. Графики энергии с учётом алиасинга волновой функции для частиц различной массы

В предельном по Маркову случае масса частицы равна планковской массе. Следовательно, при дискретном времени сколь бы ни была близка скорость движения любой частицы к скорости света, величина её энергии вследствие явления подмены частоты ограничена $E\le\frac{E_{pl}}{\sqrt{\chi}}$. В событийной концепции времени данное ограничение, как и в [5], имеет столь же фундаментальный характер, как и ограничение предельной скорости движения частицы в пространстве. Однако в [5] это ограничение постулируется, а здесь оно является следствием алиасинга волновой функции, т.е., дискретности времени.

.

Величина безразмерной физической константы $\chi$ может быть получена непосредственно из формулы (36) при инструментальном обнаружении алиасинга. Предварительную оценку этой величины можно получить на основании экспериментальных данных о предельно достижимой энергии частиц известной массы. Наблюдения космических лучей ультравысоких энергий дают основания предположить, что предельная энергия частицы (протона) составляет не менее $10^{20}$ эВ. Подставляя в (36) $E_{\sup} \geq 10^{20}$ эВ, массу протона и планковскую массу, получим $\chi \leq 0{,}00295$.

В области частот (энергий), где алиасинг не обнаруживает себя, можно считать время непрерывным. Однако, за пределами этой области характер движения частицы, при котором её энергия уменьшается с увеличением скорости, становится парадоксальным с точки зрения гипотезы о непрерывном времени.

При дискретном времени ($\chi \neq 0$) энергия частицы конечной массы вследствие подмены частоты не увеличивается монотонно до бесконечности с увеличением скорости её движения. Линия энергии на графике зависимости частоты (энергии) от скорости сминается в складки. При этом в нижних точках сопряжения складок энергия частицы оказывается равной нулю. Учитывая положительную величину энергии покоя свободной частицы массой $m$, получаем, что при её разгоне, например в ускорителе, до скорости $c'_{1F}$ выделяется энергия $E = mc^2$. Такой способ получения энергии принципиально отличается от тех, в основе которых лежат реакции взаимодействия элементарных частиц.

Явление алиасинга, вообще говоря, означает принципиальную возможность существования массивных частиц, обладающих непропорционально малой кинетической энергией. Если игнорировать алиасинг волновой функции, то по замерам энергии подобных частиц можно сделать ложный вывод относительно их массы. В результате возникнет кажущееся противоречие в результатах наблюдения, где масса частицы проявляет себя как инертная и гравитационная.

Например, массивная ультрарелятивистская частица, движущаяся со скоростью $c'_{1F} = c\sqrt{1 - \frac{1}{4}\chi\frac{m}{m_{pl}}}$ в магнитном поле с составляющей напряжённости, перпендикулярной направлению её движения, не излучает, так как интенсивность синхротронного излучения пропорциональна квадрату энергии частицы, которая в данном случае равна нулю. Не обнаруживая себя излучением электромагнитных волн, такая частица, тем не менее, взаимодействует с окружающей её материей через гравитационное поле, что, возможно, и составляет существо проблемы скрытой массы.

Вследствие алиасинга частица, энергия которой изначально значительно превышает предел Грайзена-Зацепина-Кузьмина (предел ГЗК), может перемещаться в пространстве на любые расстояния, не реагируя с фоновым микроволновым излучением. Это будет происходить, если её скорость превысит критическую (при которой происходит подмена частоты) настолько, что энергия частицы уменьшится ниже предела ГЗК $5 \cdot 10^{19}$ эВ. Если впоследствии движение частицы замедлится перед её детектированием, энергия вновь увеличится. Это может приводить к тем изменениям спектра частиц высоких энергий, которые обсуждаются как парадокс ГЗК

Литература


1. Карлин С. Основы теории случайных процессов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1971. – 536 с.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и её инженерные приложения. – М.: Наука, 1988. – 480 с.
3. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. Основные методы. – М.: Мир, 1982. – С. 28 – 32.
4. Markov M.A. // Progr. Theor. Phys.: Suppl. Commemoration Issue for 30$^{th}$ Anniversary of the Meson Theory by Dr. H.Yukawa, 1965.
5. Giovanni Amelino-Camelia. Doubly Special Relativity (2002), arXiv:gr-qc/0207049.