ОПЕРАЦИОННАЯ АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ: УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.

Ершков С.В.

В настоящей работе продолжается цикл исследований о характере эволюционных процессов [1-4], изучаемых в различных областях механики и динамики, в приложении к уравнению транспорта тепла (уравнению диффузии).

В работах [1-4] детально исследованы основные уравнения динамики и механики (*в т.ч., квантовой механики*) с точки зрения операционной автомодельности [5], а именно:

- Система уравнений Эйнштейна-Фридмана, описывающая простейшую космологическую модель эволюции Вселенной,
- Система полных уравнений Навье-Стокса для случая осесимметричных закрученных течений вязкого сжимаемого газа,
- Система уравнений электро-магнитной динамики Максвелла,
- Квантово-механическое уравнение Шрёдингера,
- Система уравнений Эйлера вращения твёрдого тела.

Проведенное исследование позволяет сделать вывод о топологическом подобии рассмотренных эволюционных моделей (уравнений): их решения подобны друг другу и решениям уравнений типа Риккати.

Уравнение теплопроводности, как известно, описывает механизм распространения тепла в различных состояниях вещества (как в жидкой, так и в твёрдой фазе). Таким образом, эволюционная модель транспорта тепла носит универсальный характер, и исследование характера этого эволюционного процесса является крайне интересной задачей с точки зрения операционной автомодельности [5].

Выпишем общий вид уравнения распространения тепла [6] в однородной и изотропной среде, в сферической системе координат $R, \ \theta, \ \varphi,$ в отсутствии источников и поглотителей тепла:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u\,, \quad u\Big|_{t=0} = f(x) \qquad (2.4.1)$$

- здесь введены следующие обозначения:

u – функция, описывающая распределение температуры (теплового поля), ограниченная для всех значений $t > 0$, $u = u(R, \ \theta, \ \varphi, \ t)$; a – коэффициент теплопроводности. Кроме того, здесь:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} ctg\,\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \ .$$

Следуя методу Фурье разделения переменных, будем искать решение в подобном виде:

$$u(R, \theta, \varphi, t) = u(t) \cdot u(R) \cdot u(\theta) \cdot u(\varphi) \qquad (2.4.2)$$

После подстановки представлений $(2.4.2)$ в уравнение $(2.4.1)$, получим уравнение следующего вида ($u \neq 0$)

$$\left(\frac{u'(t)}{a^2 \cdot u(t)}\right) = \left(\frac{1}{u(R)}\right)\cdot\frac{d^2u(R)}{dR^2} + \left(\frac{2}{R}\right)\cdot\left(\frac{1}{u(R)}\right)\cdot\frac{du(R)}{dR} +$$
$$+\left(\frac{1}{R^2 \sin^2\theta}\right)\cdot\left(\frac{1}{u(\varphi)}\right)\cdot\frac{d^2u(\varphi)}{d\varphi^2} + \left(\frac{1}{R^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{u(\theta)}\right)\cdot\frac{d^2u(\theta)}{d\theta^2} + \left(\frac{ctg\,\theta}{R^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{u(\theta)}\right)\cdot\frac{du(\theta)}{d\theta} \ .$$

Произведя в последнем уравнении замену $v = u' / u$ по всем аргументам $R,$ $\theta, \ \varphi$ и $t,$ перепишем его следующим образом

$$\left(\frac{1}{a^2}\right)\cdot v(t) = \left(v^2(R) + v'(R)\right) + \left(\frac{2}{R}\right)\cdot v(R) + \qquad (2.4.3)$$
$$+\left(\frac{1}{R^2 \cdot \sin^2\theta}\right)\cdot\left(v^2(\varphi) + v'(\varphi)\right) + \left(\frac{1}{R^2}\right)\cdot\left(v^2(\theta) + v'(\theta)\right) + \left(\frac{ctg\,\theta}{R^2}\right)\cdot v(\theta) \ .$$

Применим теперь концепцию операционной автомодельности, формирующую новые представления о характере эволюционных

$$\begin{aligned}
&\left(v^2(R) + v'(R)\right) = f_1(R),\\
&\left(v^2(\theta) + v'(\theta)\right) = f_2(\theta), \qquad\qquad (2.4.4)\\
&\left(v^2(\varphi) + v'(\varphi)\right) = f_3(\varphi).
\end{aligned}$$

преобразований [3]. Учитывая постулируемый в [3] Риккатиев характер выстраиваемых решений (*для существенных числовых инвариантов исследуемой модели* $v = u'/u$), мы можем записать:

После подстановки соотношений $(2.4.4)$ в $(2.4.3)$, получим уравнение следующего вида

$$\left(\frac{v(t)}{a^2}\right) = f_1(R) + \left(\frac{2}{R}\right)\cdot v(R) + \left(\frac{1}{R^2\cdot \sin^2\theta}\right)\cdot f_3(\varphi) + \left(\frac{1}{R^2}\right)\cdot f_2(\theta) + \left(\frac{ctg\theta}{R^2}\right)\cdot v(\theta)\ .$$

Следуя далее методу Фурье разделения переменных, из общего вида последнего уравнения и входящих в него членов, зависящих от переменных t и φ, мы можем сделать вывод, что (*здесь* $C\neq 0$):

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{v(t)}{a^2}\right) = const = -\lambda^2,\\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2.4.5)\\
&f_3(\varphi) = const = C\ .
\end{aligned}$$

В этом случае, последнее уравнение перепишется следующим образом:

$$-\lambda^2 = f_1(R) + \left(\frac{2}{R}\right)\cdot v(R) + \left(\frac{C}{R^2\cdot \sin^2\theta}\right) + \left(\frac{1}{R^2}\right)\cdot f_2(\theta) + \left(\frac{ctg\theta}{R^2}\right)\cdot v(\theta)\ ,$$

- или

$$-R^2\cdot\left(\lambda^2 + f_1(R)\right) - 2R\cdot v(R) = \left(\frac{C}{\sin^2\theta}\right) + f_2(\theta) + ctg\theta\cdot v(\theta)\ .$$

Мы видим, что в последнем уравнении переменные разделились. Таким образом, из общего вида этого уравнения и входящих в него членов, зависящих от переменных $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{\theta}$, можно сделать следующий вывод

$$-R^2\cdot\left(\lambda^2 + f_1(R)\right) - 2R\cdot v(R) = const = \tau$$

$$\left(\frac{C}{\sin^2\theta}\right) + f_2(\theta) + ctg\theta\cdot v(\theta) = const = \tau \quad . \qquad (2.4.6)$$

Теперь, выразив функции $\boldsymbol{f_1(R)}$ и $\boldsymbol{f_2(\theta)}$ из соотношений **(2.4.6)** и подставив их в **(2.4.4)**, получим:

$$\left(v^2(R) + v'(R)\right) = f_1(R) = -\frac{\tau}{R^2} - \frac{2v(R)}{R} - \lambda^2 ,$$

$$\left(v^2(\theta) + v'(\theta)\right) = f_2(\theta) = \tau - ctg\,\theta\cdot v(\theta) - \left(\frac{C}{\sin^2\theta}\right) .$$

Или, переписав несколько иначе:

$$v'(R) = -v^2(R) - \left(\frac{2}{R}\right)\cdot v(R) - \left(\frac{\tau}{R^2} + \lambda^2\right),$$

$$v'(\theta) = -v^2(\theta) - ctg\,\theta\cdot v(\theta) + \left(\tau - \frac{C}{\sin^2\theta}\right) . \qquad (2.4.7)$$

Итак, как и предполагалось, мы получили систему из двух уравнений типа Риккати [7] относительно функций $\boldsymbol{v = u'/u}$ по аргументам $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{\theta}$.

Это означает [1-4], что искомое решение существует непрерывным образом только в определенном диапазоне значений соответствующего аргумента, или, другими словами, претерпевает разрыв.

Совершив обратный переход к функции $\boldsymbol{u}$ по аргументам $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{\theta}$ в соотношениях **(*2.4.7*)**, получим

$$u''(R) + \left(\frac{2}{R}\right)\cdot u'(R) + \left(\frac{\tau}{R^2} + \lambda^2\right)\cdot u(R) = 0\,,$$

$$u''(\theta) + ctg\,\theta\cdot u'(\theta) + \left(\frac{C}{\sin^2\theta} - \tau\right)\cdot u(\theta) = 0\,. \qquad (2.4.8)$$

В общем случае ($\tau \neq 0$, $\lambda \neq 0$), первое из уравнений **(*2.4.8*)** является уравнением Бесселя и его решения выражаются через циллиндрические функции (*см.* [7]*, пример* 2.162*, случай* 1а):

$$u(R) = \left(\frac{1}{R^{1/2}}\right)\cdot Z_\nu(\lambda\cdot R), \quad \nu = \frac{1}{2}\sqrt{1-4\tau}\,,$$

а второе уравнение – это уравнение Лежандра (*достаточно произвести замену* $\eta(\xi) = y(x)$, $\xi = \cos\theta$, *чтобы убедиться в этом; см.* [7]*, пример* 2.240).

Кроме того, в [7] утверждается что решение первого из уравнений **(*2.4.8*)** может быть выражено через элементарные трансцендентные функции в том и только в том случае, когда $\lambda = 0$ или когда (n = *0, 1, 2, 3, …*):

$$\tau = 1/4 - (1/4)\cdot(2n+1)^2$$

Для определенности, положим $n = 0$ (*что означает с необходимостью* $\tau = 0$). Тогда решение первого из уравнений **(*2.4.8*)** запишется следующим образом ($\lambda \neq 0$):

$$u(R) = \left(\frac{1}{R}\right)\cdot\left(C_1\cdot\cos\lambda R + C_2\cdot\sin\lambda R\right).$$

Помимо этого, при $\tau = 0$ решение второго уравнения **(*2.4.8*)**, которое в общем случае выражается через полиномы Лежандра, крайне упрощается (*см.* [7]*, пример* 2.240, *случай* 20); для определенности положим $C = -1$, тогда:

$$u(\theta) = \left(\frac{C_3}{\sin\theta}\right) + C_4\cdot ctg\,\theta\,.$$

Что касается функций $v = u'/u$ по аргументам φ и t, то исходя из соотношений (*2.4.4*) и (*2.4.5*), мы можем записать:

$$\left(\frac{u'(t)}{u(t)}\right) = -\lambda^2 a^2 ,$$
$$v'(\varphi) + v^2(\varphi) = C \ .$$

Или, с учетом начального условия для $u(t=0)$, заданного в (*2.4.1*):

$$u(t) = u_0 \cdot exp\{-\lambda^2 \cdot a^2 \cdot t\} ,$$

а также исходя из условия ограниченности решения для всех значений $t > 0$ и $\varphi \in [0, 2\pi \cdot n], n \in N$:

$$u''(\varphi) - C \cdot u(\varphi) = 0 ,$$
$$u(\varphi) = C_5 \cdot cos\left(\varphi \cdot \sqrt{|C|}\right) + C_6 \cdot sin\left(\varphi \cdot \sqrt{|C|}\right) .$$

где $C< 0$.

Учитывая все сказанное выше, мы можем, несмотря на то что в общем случае решение определяется парой уравнений типа Риккати, выписать аналитическое представление решения для случая $\tau = 0$, $C = - 1$ ($\lambda \neq 0$), демонстрирующее асимптотику решения (*в физическом смысле*). Итак:

$$u(R, \theta, \varphi, t) = u(t) \cdot u(R) \cdot u(\theta) \cdot u(\varphi) ,$$

$$u(t) = u_0 \cdot exp\{-\lambda^2 \cdot a^2 \cdot t\} ,$$

$$u(R) = \left(\frac{1}{R}\right) \cdot \left(C_1 \cdot cos\,\lambda R + C_2 \cdot sin\,\lambda R\right),$$

$$u(\theta) = \left(\frac{C_3}{sin\,\theta}\right) + C_4 \cdot ctg\,\theta ,$$

$$u(\varphi) = C_5 \cdot cos\,\varphi + C_6 \cdot sin\,\varphi \ .$$

Список использованной литературы:

1. Ершков С. В., Щенников В. В. Об автомодельных решениях системы полных уравнений Навье-Стокса для случая осесимметричных закрученных течений вязкого сжимаемого газа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. Т. 41. № 7. С. 1117 – 1124.
2. Быркин А.П., Ершков С.В., Щенников В.В. Конически автомодельные решения уравнений Максвелла с кручением электро-магнитного поля // Материалы 3-его совещания по магнитной и плазменной аэродинамике в аэро-космических приложениях. М.: Институт высоких температур РАН. Апрель 2001. С.377–380.
3. Ершков С.В. Параметрическая коррекция представлений о характере эволюционных преобразований // Опубликовано на сайте Института исследований природы времени: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/yershkov_parametricheskaya.pdf
4. Ершков С.В. Концепция операционной автомодельности в приложении к модели твёрдого тела // Опубликовано на сайте Института исследований природы времени: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/yershkov_kontseptsia.pdf
5. Ершков С.В. Топологические аспекты динамического подобия в моделировании Времени // Опубликовано на сайте Института исследований природы времени: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/yershkov_topologich/yershkov_topologich.htm
6. Купер Леон Н. Физика для всех (введение в сущность и структуру физики) М.: ”Мир”.1973. Т. 1 “Классическая физика”.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям М.: Наука. 1971.