ПЕТРОВА Л.И.

В Н Е Ш Н И Е Д И Ф Ф Е Р Е Н Ц И А Л Ь Н Ы Е ФОРМЫ В ТЕОРИИ П О Л Я

Основы качественной эволюционной теории поля

Москва
МАКС Пресс
2000

УДК 530.1 : 514.745
ББК 22.311
П30

Л.И.Петрова

П30 **Внешние дифференциальные формы в теории поля:** Основы качественной эволюционной теории поля. -М.: МАКС Пресс, 2000. - 84 с.

ISBN 5-317-00052-1

В работе предложена математическая теория, объясняющая эволюционный процесс в материальных системах и механизм формирования физических полей. Она базируется на свойствах внешних дифференциальных форм, позволяющих описывать законы сохранения. Как известно, в основе инвариантной теории поля лежат свойства замкнутых форм, соответствующих законам сохранения для физических полей. В данной работе используются свойства внешних дифференциальных форм, определенных на недифференцируемых многообразиях. Эти формы не могут быть замкнутыми. Это неинтегрируемые формы. Такие формы появляются при описании законов сохранения для материальных систем (балансных законов сохранения энергии, количества движения, момента количества движения и массы). Они характеризуют взаимодействие балансных законов сохранения. Именно такое взаимодействие определяет эволюционный процесс. Возникновению физических структур, образующих физические поля, соответствует переход от неинтегрируемых форм, описывающих балансные законы сохранения для материальных систем, к замкнутым формам, описывающим законы сохранения для физических полей.

Особенностью данной теории является наличие нетождественных соотношений и вырожденных преобразований, что связано со свойствами неинтегрируемых форм. Именно эта особенность позволила получить принципиально новые результаты.

УДК 530.1: 514.745
ББК 22.311

ISBN 5-317-00052-1

СОДЕРЖАНИЕ

ВНЕШНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

(основы качественной эволюционной теории поля)

Аннотация

В теории поля хорошо известна роль замкнутых внешних дифференциальных форм, инвариантные свойства которых соответствуют законам сохранения для физических полей. В данной работе раскрывается роль в теории поля неинтегрируемых форм - форм, определенных на недифференцируемых многообразиях. Такие формы не являются замкнутыми. Особенностью математического аппарата, основанного на свойствах неинтегрируемых форм, является появление нетождественных соотношений и вырожденных преобразований.

Неинтегрируемые формы получаются из уравнений, описывающих балансные законы сохранения для материальных систем (энергии, количества движения, момента количества движения и массы). В сопутствующей системе координат эти уравнения сворачиваются в эволюционное соотношение, которое содержит неинтегрируемую форму и поэтому является нетождественным. Нетождественность соотношения означает, что балансные законы сохранения не коммутируют между собой. Внутренние силы, которые возникают в результате этого, описываются коммутатором неинтегрируемой формы. Однако при дополнительных условиях, которые определяются свойствами материальной системы и реализуются в эволюционном процессе, возможно сопряжение балансных законов сохранения. При этом внутренние силы переходят в потенциальные, что сопровождается возникновением измеримых образований (таких как волны, вихри, пульсации, рождающиеся частицы и т.д.). Математически этому соответствует вырожденное преобразование - переход от неинтегрируемой формы (дифференциал от которой не равен нулю) к замкнутой (дифференциал от которой равен нулю). Появление замкнутых форм означает возникновение физических структур, образующих физические поля.

Математическую теорию, объясняющую эволюционный процесс в материальных системах и механизм формирования физических полей, можно рассматривать как качественную эволюционную теорию поля[1-8].

External differential forms in the field theory

Petrova L.I.

Abstract

The role of closed external differential forms in field theory is well known. They describe basic characteristics of physical fields - the conservation laws and the potentials. This paper discusses the role non-integrated forms - forms, which are defined on arbitrary variaties and not be

closed. These forms are derived from equations which describe basic conservation laws for material systems (energy, impuls, momentum of impuls and mass). In the accompanying coordinate systems these equations are transformed into non-identical evolutionary relations which contain non-integrated form. In case of degenerative transformation evolutionary relations lead to closed forms which correspond to physical fields. It is the evolutionary field theory.

Введение.

Существующим теориям поля, базирующимся на законах сохранения для физических полей, соответствуют инвариантные свойства замкнутых внешних дифференциальных форм. Роль замкнутых форм в теории поля хорошо известна, поэтому основное внимание в данной работе будет уделено внешним дифференциальным формам, которые не являются замкнутыми. Для теории поля, как будет показано ниже, существенное значение имеют формы, определенные на многообразиях, которые не являются дифференцируемыми. Такие формы не могут быть замкнутыми (без дополнительных условий). На исходном многообразии это неинтегрируемые формы, так как они не могут быть выражены через дифференциал и непосредственно проинтегрированы.

Неинтегрируемые формы появляются при описании балансных законов сохранения для материальных систем (законов сохранения, которые устанавливают баланс между изменением физических величин и внешними воздействиями). В дальнейшем будут рассматриваться балансные законы сохранения энергии, количества движения, момента количества движения и массы.

Переход от неинтегрируемых форм к замкнутым (при вырожденных преобразованиях) есть переход от балансных законов сохранения для материальных систем к законам сохранения для физических полей. Этому соответствует возникновение сохраняющихся объектов - физических структур, что проявляется в физических процессах как спонтанное возникновение в материальных системах некоторых наблюдаемых, измеримых, образований (примерами таких образований являются волны, вихри, пульсации, частицы и т.д.). Такой переход показывает, что генераторами физических структур являются материальные системы.

В работе показано, что из уравнений, описывающих балансные законы сохранения энергии, количества движения, момента количества движения и массы для материальных систем, получается эволюционное соотношение, содержащее неинтегрируемую форму. Особенностью такого соотношения является то, что оно оказывается нетождественным. Нетождественность эволюционного соотношения указывает на некоммутативность балансных законов сохранения: приращения физических величин, которые получаются из балансных законов сохранения (а, следовательно, и сами физические величины), оказываются несопряженными. Это объясняет возникновение в материальных системах внутренних сил (за счет внешних воздействия) и неравновесность физических процессов. Такая неравновесность является причиной эволюционных процессов в материальных системах.

Анализ эволюционного соотношения позволяет раскрыть механизм эволюционных процессов и понять, каким образом материальные системы генерируют структуры, образующие физические поля.

Первый параграф данной работы посвящен существующей инвариантной теории поля, базирующей на свойствах замкнутых внешних дифференциальных форм, соответствующих законам сохранения для физических полей. Приводятся некоторые свойства внешних дифференциальных форм, которые находят применение в теории поля.

Во втором параграфе изложены основы качественной эволюционной теории поля, базирующейся на свойствах неинтегрируемых форм, соответствующих балансным законам сохранения для материальных систем. Получено эволюционное соотношение. Показано, каким образом из эволюционного соотношения, содержащего неинтегрируемую форму, получаются замкнутые формы, что соответствует возникновению (в эволюционном процессе) физических структур.

В приложении 1 описываются функциональные свойства решений дифференциальных уравнений, которые имеют значение для описания эволюционных процессов и для теории поля. Анализируется уравнение поля. Показывается связь между вырожденными преобразованиями в дифференциальных уравнениях и невырожденными преобразованиями теории поля.

В приложениях 2 - 4 дается анализ электромагнитного поля, термодинамической системы (начал термодинамики) и газодинамической системы.

В приложении 5 приводится некоторая классификация элементарных частиц и взаимодействий в зависимости от степени неинтегрируемой формы, входящей в эволюционное соотношение, от степени генерируемых замкнутых форм и от размерности пространства.

В приложении 6 рассматривается формирование псевдометрических и метрических пространств, и приводится некоторый анализ риманова пространства и уравнения Эйнштейна.

1. Внешние дифференциальные формы в инвариантной теории поля.

Внешнюю дифференциальную форму степени p (p форму) можно записать в виде[9,10] (по одинаковым индексам предполагается суммирование)

$$\theta^p = A_{\alpha_1 \cdots \alpha_p} dx^{\alpha_1} dx^{\alpha_2} \ldots dx^{\alpha_p} \qquad 0 \le p \le n$$

где базис $1, dx^\alpha, dx^\alpha dx^\beta, dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma, \cdots$ удовлетворяет условию

$$dx^\alpha dx^\alpha = 0$$

$$dx^\alpha dx^\beta = -dx^\beta dx^\alpha \qquad \alpha \ne \beta$$

Дифференциал (внешний) формы θ^p выражается формулой

$$d\theta^p = dA_{\alpha_1 \cdots \alpha_p} dx^{\alpha_1} dx^{\alpha_2} \cdots dx^{\alpha_p}$$

и является дифференциальной формой степени ($p+1$).

Свойства внешних дифференциальных форм, которые используются в теории поля, приведены в работах[11-15].

Для теории поля имеют значение инвариантные свойства, которыми обладают замкнутые формы. Замкнутой называется форма, дифференциал которой равен нулю. Условие замкнутости p-формы θ^p (формы степени p) записывается в виде

$$d\theta^p = 0$$

Если форма замкнута только на некоторой пространственной структуре - псевдоструктуре, то условие замкнутости записывается в виде

$$d_\pi \theta^p = 0$$

где через π обозначена псевдоструктура, которая в этом случае удовлетворяет условию

$$d_\pi\, {}^*\theta^p = 0$$

где ${}^*\theta^p$- дуальная форма. {Внешней дифференциальной форме на дифференцируемом многообразии соответствует кососимметричный тензор. Дуальной форме, описывающей псевдоструктуру, соответствует псевдотензор, дуальный кососимметричному тензору. Псевдоструктуры образуют когомологии (когомологии де Рама, сингулярные когомологии [9], сечения кокасательных расслоений и т.д.). Они соответствуют поверхностям эйконала, которые с одной стороны являются поверхностями уровня, а с другой - поверхностями разрыва.}

Если форма равна полному дифференциалу, то есть

$$\theta^p = d\theta^{p-1}$$

то такая форма называется точной формой. Точные формы являются автоматически замкнутыми: $d\theta^p = dd\theta^{p-1} = 0$.

Следует отметить, что любая замкнутая форма является дифференциалом. Но если точная форма является полным дифференциалом, то замкнутая неточная форма является внутренним, на псевдоструктуре, дифференциалом:

$$\theta^p = d_\pi \theta^{p-1}$$

Два последних соотношения показывают, что существует связь между формами последовательных степеней. Аналогично дифференциальным соотношениям имеется подобное интегральное соотношение[12]

$$\int\limits_{c^{p+1}} d\omega^p = \int\limits_{\partial c^{p+1}} \omega^p$$

Теоремы Стокса и Гаусса являются частными случаями этого соотношения. Интеграл от точной формы по замкнутому пути равен нулю. Интеграл от замкнутой неточной формы по замкнутому пути не равняется нулю. В теории поля он может равняться такой физической величине как заряд[12].

Внешние дифференциальные формы в теории поля появляются при описании законов сохранения. Из условия замкнутости внешней дифференциальной формы видно, что замкнутая форма является: а) - постоянным (сохраняющимся) объектом, если d - полный дифференциал, или б) - локально-постоянным, на некоторой псевдоструктуре π, объектом, если $d = d_\pi$ есть внутренний дифференциал на этой псевдоструктуре. Условия замкнутости внешней формы ($d_\pi \theta^p = 0$) и дуальной ей формы ($d_\pi {}^*\theta^p = 0$) являются математическим выражением закона сохранения для физических полей.

Сохраняющиеся объекты - объекты, образованные сопряженными физическими величинами (замкнутые внешние формы) на псевдоструктурах (дуальные формы) есть физические структуры, из которых и формируются физические поля:

$$\begin{cases} d_\pi \theta^p = 0 \\ d_\pi {}^*\theta^p = 0 \end{cases} \mapsto \begin{cases} \theta^p \\ {}^*\theta^p \end{cases} \text{ — физическая структура } \rightarrow$$

физические поля

Видно, что уравнения физических структур (условия замкнутости внешней и дуальной форм) совпадают с математическим выражением закона сохранения.

Таким образом система дифференциальных форм: замкнутая форма, обладающая инвариантными свойствами, и дуальная ей форма, обладающая метрическими свойствами, позволяют описать физические структуры. Зависимость свойств внешних дифференциальных форм от степени формы, от размерности пространства, сложная внутренняя и внешняя структура внешних форм, различные условия и способы сопряжения обеспечивают разнообразие описываемых физических структур.

Далее, как уже отмечалось, из условия замкнутости следует, что любая замкнутая форма является дифференциалом (полным: $\theta^p = d\theta^{p-1}$, если форма точная, или внутренним: $\theta^p = d_\pi \theta^{p-1}$ - на псевдоструктуре, если форма не является точной) от формы низшей степени. Форма низшей степени в этом случае соответствует потенциалу, а сама замкнутая форма - потенциальной силе. Двойственность замкнутой формы - с одной стороны как локально-постоянного объекта, а с другой - как потенциальной силы, характеризует роль физических полей как переносчиков взаимодействия. (Вопрос: по отношению к чему замкнутая форма выступает как потенциальная сила. Ответ ниже).

Инвариантные и метрические свойства замкнутых внешних дифференциальных форм лежат в основе существующих теорий поля. Если кроме внешнего дифференциала d ввести операторы: 1) δ - для преобразования, переводящего форму степени $p+1$ в форму степени p, 2) $\delta`$ - для кокасательных преобразований, 3) $\Delta$ - для преобразования $d\delta - \delta d$, 4) $\Delta`$ - для преобразования $d\delta` - \delta` d$, то через эти операторы, действующие на дифференциальные формы, можно записать операторы уравнений теории поля. Оператор δ соответствует оператору Грина, $\delta`$ - оператору канонического преобразования, $\Delta$ - оператору Даламбера в четырехмерном пространстве, $\Delta`$ - оператору Лапласа[12,14]. Собственные значения этих операторов проявляются как условия сопряжения элементов дифференциальных форм. Тензорным уравнениям теории поля соответствуют замкнутые дифференциальные формы как кососимметричные тензоры.

Можно показать, что существующие теории поля явно или неявно сводятся к нахождению замкнутых форм, обладающих свойствами инвариантности. В то же время практически все существующие теории поля включают в себя элементы неинвариантности: базируются или на функционалах, которые не являются тождественными инвариантами (таких как Лагранжиан, функционал действия, энтропия), или на уравнениях (дифференциальных, интегральных, тензорных, спинорных, матричных и т.д.), которые не обладают тождественной инвариантностью (интегрируемостью или ковариантностью). Такими элементами неинвариантности являются, например, отличие от нуля тензора кривизны в теории Эйнштейна[16], принцип неопределенности в теории Гейзенберга, кручение в теории Вейла[16], сила Лоренца в электромагнитной теории[17], отсутствие общей интегрируемости уравнений Шредингера, неметрические сечения в полях Янга-Милса, функция Лагранжа в вариационных методах, отсутствие тождественной интегрируемости уравнений математической физики и тождественной ковариантности тензорных уравнений и т.д.. Только допуская элементы неинвариантности, можно получить замкнутые неточные формы. Именно такие замкнутые формы могут соответствовать физическим структурам, образующим физические поля.

В то же время существующие теории поля являются инвариантными, так как в них вводятся дополнительные условия, при которых выполняется инвариантность или ковариантность. Такими условиями являются, например, тождественные соотношения: канонические - в уравнениях Шредингера, контактные - в электромагнитной теории, перестановочные - в теории Гейзенберга, симметричные связности Кристоффеля, тождественные соотношения Бианки в теории Эйнштейна, кокасательные расслоения в полях Янга-Милса, функция Гамильтона в вариационных методах, условия ковариантности в тензорных методах, характеристические соотношения (условия интегрируемости) в уравнениях математической физики и т.д.. Можно показать, что эти условия инвариантности есть условия замкнутости внешней или дуальной формы.

Так как существующие теории поля подчиняются условиям инвариантности, то уравнения существующих теорий поля имеют только инвариантные решения (решения, которые можно выразить через замкнутые или дуальные к ним формы, и которые соответствуют физическим полям). Возможные неинвариантные решения, которые могли бы реализоваться, если бы не накладывались условия инвариантности, не учитываются. С этой точки зрения можно выделить два типа уравнений или методов инвариантной теории поля. Принципиальное отличие этих двух типов заключается в следующем. Один тип имеет только инвариантные решения. Другой, если снять условия инвариантности, может иметь неивариантные решения, имеющие физический смысл. К первому типу относятся тензорные, спинорные, матричные, вариационные уравнения, методы теории групп, теории преобразований, теории симметрий, теории расслоений. Ко второму типу относятся так называемые уравнения математической физики - дифференциальные и интегральные уравнения, описывающие физические процессы. Неинвариантные решения уравнений второго типа, как будет показано ниже, играют определяющую роль при описании механизма возникновения физических структур. В то же время именно уравнения и методы первого типа (уравнения Максвелла, Шредингера, Гейзенберга, Дирака, Эйнштейна, поля Янга-Милса, теория групп, теория симметрий и т.д.) позволили открыть огромное многообразие физических структур, описать физические поля и понять закономерности физического мира.

Инвариантные теории поля позволяют описать физические поля, найти возможные физические структуры, раскрыть многообразие физических полей. Но инвариантные теории поля не могут ответить на вопрос о механизме возникновения физических структур, образующих физические поля.

Ответ на этот вопрос может дать только неинвариантная теория поля, в которой не вводятся дополнительно условия инвариантности. Условия инвариантности должны реализоваться сами без внесения извне. В физическом процессе это происходит спонтанно. То есть теория поля должна быть эволюционной. Спонтанная (то есть обусловленная внутренними, а не внешними причинами) реализация условий инвариантности и будет означать формирование замкнутой формы, что будет указывать на возникновение физической структуры.

В неинвариантной теории поля существенную роль играют формы, определенные на недифференцируемых многообразиях. Такие формы оказываются незамкнутыми. Это неинтегрируемые формы. Коммутаторы таких форм обладают топологическими свойствами, которые имеют определяющее значение для теории поля.

2. Качественная эволюционная теории поля.

а) *Законы сохранения.* В основе инвариантной теории поля, как уже отмечалось, лежат законы сохранения. Эволюционная теория поля тоже основывается на законах сохранения. При этом следует различать два типа законов сохранения. 1). **Законы сохранения - сохраняющиеся физические объекты**. Такие законы сохранения относятся к **физическим полям.** {Физические поля[18] - особая форма материи - переносчики взаимодействий - электромагнитные, гравитационные, волновые, ядерных сил и т.д.}. Законам сохранения для физических полей соответствуют замкнутые внешние дифференциальные формы. 2). **Балансные законы сохранения -** законы сохранения, устанавливающие **баланс между изменением физической величины и соответствующими внешними воздействиями**. В отличие от первых законов сохранения, балансные законы сохранения - энергии, количества движения, момента количества движения и массы - это законы сохранения для **материальных систем.** {Материальные системы - совокупность (бесконечная) элементов, имеющих внутреннее строение и взаимодействующих между собой. Примерами таких элементов являются электроны, протоны, нейтроны, атомы, частицы жидкости и т.д. (Таким элементам соответствуют **точные** формы нулевой степени). Примерами материальных систем являются термодинамические, газодинамические, космологические системы, системы элементарных частиц и т.д.. Физический вакуум по своим свойствам может быть аналогом такой генерирующей материальной системы для некоторых физических полей}. Балансным законам сохранения, как будет показано в данной работе, соответствуют неинтегрируемые формы. {В дальнейшем законы сохранения для физических полей - сохраняющиеся физические объекты, будут называться точными, в отличие от законов сохранения для материальных систем, которые являются балансными. Будет показано, что точные законы сохранения следуют из балансных при выполнение дополнительных условий, которые связаны со степенями свободы материальных систем.}

Инвариантная теория поля основывается на законах сохранения для физических полей и ей соответствуют замкнутые формы. Эволюционная теория поля, как будет показано ниже, основывается на законах сохранения для материальных систем и ей соответствуют неинтегрируемые формы.

б). *Эволюционное соотношение.* Балансными законами сохранения для материальных систем являются балансные законы сохранения энергии, количества движения, момента количества движения и массы.

Изменение физических величин материальной системы под влиянием каких-либо воздействий происходит в соответствии с балансными законами сохранения. И здесь существенным является **взаимодействие балансных законов сохранения между собой.** Как будет показано ниже, балансные законы сохранения оказываются некоммутативными. Именно это имеет определяющее значение для эволюционных процессов и для механизма возникновения физических структур.

Чтобы понять, как взаимодействуют между собой балансные законы сохранения, надо исследовать сопряженность уравнений, описывающих эти законы.

Балансные законы сохранения можно описать при помощи дифференциальных уравнений[19,30]. Если же материальная система не является динамической (как, например, термодинамическая система), то уравнения балансных законов сохранения могут быть записаны через приращения физических величин и определяющих переменных.

Уравнения являются сопряженными, если их можно свернуть в соотношение для дифференциала, то есть для замкнутой формы. Проанализируем уравнения, описывающие балансные законы сохранения энергии и количества движения.

Введем две системы координат: инерциальную (не связанную с материальной системой) и сопутствующую (связанную с многообразием, образованным траекториями элементов материальной системы).

Уравнение, описывающее балансный закон сохранения энергии, в инерциальной системе координат можно привести к виду:

$$\frac{D\psi}{Dt} = A \qquad (1)$$

где ψ - функционал, характеризующий материальную систему, A - величина, зависящая от характеристик системы и от внешних энергетических воздействий, которые испытывает материальная система (локально). Здесь D/Dt - полная производная по времени. {Примерами функционала ψ являются функционал действия, энтропия, волновая функция. Так уравнение энергии, выраженное через функционал действия S, имеет такой же вид, как и уравнение (1):

$$\frac{DS}{Dt} = L \qquad (1`)$$

где $\psi = S,\ \ A = L$ - функция Лагранжа. В механике сплошных сред уравнение энергии для невязкого газа может быть записано в виде [20]

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \qquad (1``)$$

где s - энтропия (см. приложение 4). В этом случае $\psi = s, A = 0$. Приведенные примеры не только раскрывают физический смысл функционала ψ, но и показывают взаимосвязь физического смысла функционала действия и энтропии}.

В сопутствующей системе координат полная производная по времени переходит в производную вдоль траектории. Уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi^1} = A_1 \qquad (2)$$

где ξ^1 - координата вдоль траектории.

Аналогично, уравнение балансного закона сохранения количества движения в сопутствующей системе координат сводится к уравнению вида

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi^\nu} = A_\nu, \qquad \nu = 2, \ldots \qquad (3)$$

где ξ^ν - координаты в направлении, нормальном к траектории, A_ν - величины, зависящие от характеристик системы и от внешних (силовых) воздействий на систему (см., например, приложение 4).

Уравнения (2) и (3) можно свернуть в соотношение

$$d\psi = A_\mu d\xi^\mu \quad (\mu = 1, \nu) \qquad (4)$$

где $d\psi$ есть дифференциальное выражение $d\psi = (\partial\psi / \partial\xi^\mu) d\xi^\mu$.

Соотношение (4) можно записать в виде:

$$d\psi = \omega \qquad (4')$$

где $\omega = A_\mu d\xi^\mu$ - есть дифференциальная форма первой степени.

Так как уравнения, описывающие балансные законы сохранения, являются эволюционными, то и полученное соотношение тоже является эволюционным. (Каждой материальной системе соответствует свое эволюционное соотношение. Некоторые конкретные соотношения рассмотрены в приложениях.)

Соотношение (4′) было получено из уравнений балансных законов сохранения энергии и количества движения. В этом соотношении форма ω является формой первой степени. Если к уравнениям балансных законов сохранения энергии и количества движения добавить уравнения балансных законов сохранения момента количества движения, то в эволюционном соотношении эта форма будет формой второй степени (пример в приложение **2**, где рассматривается электромагнитное поле). Соответственно с уравнением балансного закона сохранения массы форма, стоящая в правой части эволюционного соотношения, будет формой третьей степени (пример в приложении 6 о гравитационных полях).

в). *Особенность эволюционного соотношения.* Эволюционное соотношение (4) напоминает уравнение Пфаффа. Однако это не есть уравнение. Соотношение - это некоторая функциональная связь между входящими в соотношение величинами.

Так как **эволюционное соотношение** получается не из одного, а из нескольких уравнений балансных законов сохранения, то оно **описывает связь между балансными законами сохранения, их взаимодействие между собой.**

Раскрыть характер взаимодействия балансных законов сохранения позволяет **особенность эволюционного соотношения - для реальных процессов оно оказывается нетождественным соотношением.**

Чтобы показать это, рассмотрим коммутатор формы $\omega = A_\mu dx^\mu$, входящей в эволюционное соотношение (4′). Компоненты коммутатора формы ω можно записать через коэффициенты формы ω в виде

$$K_{\alpha\beta} = (\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta})$$

(Здесь нет члена, связанного с недифференцируемостью многообразия. О формировании этого члена и о его роли в описании эволюционного процесса будет сказано ниже). Коэффициенты формы ω, как это можно заметить из вывода соотношения (4′), получаются - одни из уравнения балансного закона сохранения энергии, а другие - из уравнений балансного закона сохранения количества движения. А это значит, что первые зависят от энергетических воздействий, а вторые - от силовых воздействий. В реальных процессах энергетические и силовые воздействия имеют разную природу и оказываются несогласованными. Коммутатор формы ω, полученный из таких коэффициентов, не будет равен нулю. (Так же можно показать, что и коммутатор формы, входящей в общее эволюционное соотношение, где учитываются другие балансные законы сохранения, для реальных процессов не равен нулю.) А так как элементы дифференциала формы равняются компонентам коммутатора формы, то и дифференциал формы не равен нулю. То есть форма ω, входящая в правую часть соотношения, для реальных процессов является незамкнутой и не может быть дифференциалом, как левая часть соотношения. Эволюционное соотношение оказывается нетождественным. Слева в этом соотношении стоит дифференциал, а справа - форма, которая не может быть дифференциалом.

Таким образом, даже не зная конкретное выражение формы ω, можно утверждать, что для реальных процессов из-за несогласованности внешних воздействий коммутатор формы ω не равен нулю и эволюционное соотношение оказывается нетождественным.

Чтобы подчеркнуть, что эволюционное соотношение может быть нетождественным, имеет смысл записать соотношение (4′) в виде

$$d\psi \cong \omega \qquad (5)$$

(вместо знака равенства = введен знак $\cong$), а эволюционное соотношение, учитывающее взаимодействие всех балансных законов сохранения, в виде

$$d\psi \cong \omega^p \qquad (6)$$

где степень форм p может принимать значения $p = 0,1,2,3$. (Здесь, кроме перечисленных выше степеней, приведено значение $p = 0$. Эволюционное соотношение с $p = 0$ является аналогом соотношения в дифференциальных формах и получается из взаимодействия энергии и времени или импульса и координаты.)

{**Что такое нетождественное соотношение?** Соотношение может быть тождественным только в том случае, если оно является соотношением между метрическими или инвариантными, измеримыми, объектами, то есть объектами, которые можно сравнивать. В таком соотношении как эволюционное один объект ($d\psi$) является инвариантным, а другой (ω^p) не является инвариантным объектом, так как оказывается незамкнутой формой. Понятие "нетождественное соотношение" может показаться противоречивым понятием. Однако, оно несет глубокую смысловую нагрузку. Тождественное соотношение устанавливает точное соответствие между входящими в него величинами. Нетождественное соотношение тоже может установить точное соответствие между входящими в него величинами, но только при дополнительных условиях. При невыполнение таких условий оно тоже имеет физический смысл. Если это соотношение эволюционное, то оно оказывается самоизменяющимся соотношением: изменение одного объекта соотношения вызывает изменение второго объекта, а изменение второго объекта в свою очередь приводит к изменению первого и т.д.. Так как один из объектов является неизмеримым, то другой объект не может сравниться с первым и поэтому этот процесс взаимоизменения не может остановиться без дополнительных условий. Дополнительные условия могут реализоваться сами при самоизменении нетождественного соотношения благодаря каким-либо степеням свободы. Тогда соотношение выполнится и установится точное соответствие между входящими величинами. Именно нетождественные соотношения, каким и является эволюционные соотношения, могут описать самоорганизацию материальных систем. Принцип самоорганизации будет раскрыт ниже}.

Нетождественность эволюционного соотношения указывает на несопряженость уравнений балансных законов сохранения (так, если из уравнения энергии получить производную от ψ в направлении траектории, а из уравнения количества движения - производную от ψ в направлении, нормальном к траектории, то окажется, что их смешанные производные неперестановочны; коммутатор, который совпадает с коммутатором формы ω, не равен нулю). А это означает, что балансные законы сохранения не коммутируют между собой. И связано это с характером внешних воздействий.

Как влияет это свойство балансных законов сохранения на состояние материальной системы? Если балансные законы сохранения коммутируют, то есть коммутатор формы ω^p равен нулю, то форма ω^p является замкнутой и выражается через дифференциал. Слева и справа в эволюционном соотношении стоят дифференциалы и, следовательно, из него можно получить дифференциал $d\psi$. А это указывает на равновесное или локально-равновесное состояние системы. Если же балансные законы не коммутируют - коммутатор формы ω^p не равен нулю (что имеет место для реальных процессов), то форма ω^p является незамкнутой и не является дифференциалом. Из эволюционного соотношения, которое в этом случае оказывается нетождественным, невозможно получить дифференциал $d\psi$, что указывает на неравновесное состояние системы. При этом очевидно, что внутренние силы, вызывающие неравновесность, описываются коммутатором формы ω^p.

Таким образом, эволюционное соотношение с одной стороны раскрывает характер взаимодействия балансных законов сохранения: для реальных процессов они оказываются некоммутативными, а с другой стороны показывает, что некоммутативность балансных законов сохранения является причиной неравновесного состояния материальной системы. Более того, ниже показано, что некоммутативность балансных законов сохранения определяет не только состояние материальной системы, но и является движущей силой эволюционных процессов, протекающих в материальной системе. Чтобы показать это, надо раскрыть свойства формы ω^p, входящей в эволюционное соотношение, и свойства коммутатора этой формы.

г) *Свойства коммутатора неинтегрируемой формы* ω^p**.**

Если форма $\omega = A_\mu dx^\mu$ определена на дифференцируемом многообразии, то коммутатор этой формы можно записать в виде

$$K_{\alpha\beta} = (\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}) \qquad (7)$$

Если многообразие не является дифференцируемым, то в коммутатор формы войдет еще коммутатор метрической формы многообразия (характеризующий деформацию многообразия).

Формы, входящие в эволюционное соотношение, определены на сопутствующем многообразии. Это многообразие формируется одновременно с изменением состояния материальной системы и зависит от физических процессов. Покажем, что для реальных процессов оно не может быть дифференцируемым.

Вернемся к эволюционному соотношению (5). Допустим, что в начальный момент сопутствующее многообразие было дифференцируемым и коммутатор формы ω, входящей в эволюционное соотношение, равнялся нулю. Если в последующий момент на материальную систему будет оказано какое-либо воздействие, то этот коммутатор окажется отличным от нулю и форма ω окажется незамкнутой. Эволюционное соотношение станет нетождественными и из него нельзя будет определить дифференциал $d\psi$. Это значит, что состояние материальной системы стало неравновесным - появилась внутренняя сила, величина которой равняется коммутатору формы ω. Действие внутренней силы приведет к деформации сопутствующего многообразия. Сопутствующее многообразие перестанет быть дифференцируемым. В коммутаторе формы ω появится дополнительный член, характеризующий деформацию многообразия - коммутатор метрической формы многообразия. Если могут быть определены коэффициенты связности $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$ (для недифференцируемого многообразия они не являются симметричными), то коммутатор дифференциальной формы первой степени $\omega = A_\alpha dx^\alpha$ можно будет записать в виде

$$K_{\alpha\beta} = (\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}) + (\Gamma^\sigma_{\beta\alpha} - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta})A_\sigma \qquad (8)$$

где во второй член войдет коммутатор метрической формы $(\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta})$, характеризующий кручение многообразия.

В коммутаторе (8) первоначальный член зависит только от коэффициентов формы, в то время как дополнительный член зависит от характеристик многообразия. Эти члены имеют разную природу и не могут быть тождественно равными (по абсолютной величине). Они не могут обратить коммутатор в нуль. Появление дополнительного члена может только изменить коммутатор, но не может обратит его в нуль. То есть в материальной системе будет продолжать действовать внутренняя сила (даже при отсутствии внешних воздействий). Будет происходить дальнейшая деформация (кручение) многообразия. А это будет означать дальнейшее изменение коммутатора метрической формы, коммутатора внешней формы, изменение формы ω и затем снова дальнейшее изменение коммутатора (самоизменение) и т.д.. Подобными свойствами обладают и коммутаторы форм ω^p других степеней. При этом входящие в них коммутаторы метрических форм соответствующих степеней характеризуют другие свойства деформации. Так коммутатор метрической формы нулевой степени характеризуют изгиб многообразия, а третьей степени - кривизну многообразия.

Процесс самоизменения коммутатора, характеризующего внутреннюю силу, и самоизменение состояния материальной системы, регулируется эволюционным соотношением. Так как эволюционное соотношение получено из балансных законов сохранения, а отличие от нуля коммутатора связано с некоммутативностью балансных законов сохранения (коммутатор не равен нулю из-за несогласованности внешних воздействий и несопряженности вследствие этого уравнений балансных законов сохранения), то становится ясным, что процесс самоизменения состояния материальной системы регулируется балансными законами сохранения и связан с их некоммутативностью. Здесь следует подчеркнуть, что самоизменение состояния материальной системы происходит не под действием внешних сил, а под действием внутренних сил и оно может продолжаться и без дальнейшего действия внешних сил. При этом внутренняя сила непрерывным образом в реальном физическом процессе может нарастать. Именно это может привести к развитию неустойчивости материальной системы. {Об этом, например, отмечалось в работах Пригожина [21]. "Избыточная энтропия" в работах Пригожина есть аналог коммутатора неинтегрируемой формы для термодинамической системы. К развитию неустойчивости приводит "производство избыточной энтропии", описываемой таким коммутатором (см. приложение 3)}.

Возникает вопрос, может ли материальная система, находящаяся в неравновесном состоянии, каким-то образом избавится от внутренней силы. То есть может ли неизмеримая величина, описываемая коммутатором формы ω^p, и действующая как внутренняя сила, перейти в измеримые, физические, величины. Это означало бы переход внутренних сил в потенциальные (что соответствовало бы возникновению физической структуры) и переход материальной системы в локально-равновесное состояние.

Чтобы понять, может ли реализоваться такой переход, надо снова обратиться к эволюционному соотношению и к свойствам замкнутых внешних дифференциальных форм, описывающих физические структуры.

<u>д) ***Вырожденное преобразование. Возникновение физической структуры. Переход от материальной системы к физическим полям.***</u> Для реальных процессов коммутатор формы ω^p, входящей в эволюционное соотношение, как было показано выше, не равен нулю и соответственно

$$d\omega^p \neq 0 \qquad (9)$$

Форма ω^p не является замкнутой и из эволюционного соотношения следует, что не существует функционала состояния $d\psi$, который был бы дифференциалом и замкнутой формой. Физической же структуре должен соответствовать функционал состояния, который является замкнутой неточной формой - замкнутой формой на некоторой псевдоструктуре, то есть некоторый функционал $d_\pi\psi'$, для которого

$$d_\pi(d_\pi\psi') = 0 \qquad (10)$$

А это в соответствии с эволюционным соотношением может быть, если имеется форма $\omega'^p = d_\pi\psi'$, для которой выполняются условия (штрих относится к замкнутым формам)

$$
\begin{cases} d_\pi \omega'^p = d_\pi (d_\pi \psi') = 0 \\ d_\pi{}^* \omega'^p = 0 \end{cases} \qquad (11)
$$

В условии (9) дифференциал отличен от нуля, а в условиях (11) дифференциал равен нулю. Переход от условия (9) к условию (11), что соответствовало бы возникновению физической структуры, возможен только как **вырожденное преобразование** (преобразование, не сохраняющее дифференциал).

Вырожденному преобразованию должно соответствовать некоторое дополнительное условие. (Такими дополнительными условиями является, например, обращение в нуль таких функциональных выражений как якобианы, детерминанты, скобки Пуассона и т.д. Более подробно о вырожденных преобразованиях и их связи с невырожденными преобразованиями инвариантной теории поля написано в приложении **1**). Так как эволюционное соотношение описывает материальные системы, то, очевидно, что условие вырожденного преобразования должно быть обусловлено свойствами материальной системы (что фиксируется формой ω^p, коэффициенты которой зависят от свойств материальной системы). Такими свойствами может быть наличие, например, у материальной системы каких-либо степеней свободы. Именно, при реализации какой-либо степени свободы может произойти перераспределение между физическими величинами (например, между энергией и количеством движения), такое, что эти физические величины станут одновременно измеримыми. Такими степенями свободы могут быть, например, поступательные степени свободы, внутренние степени свободы элементов системы и т.д..

Эволюционное соотношение и соответственно условие (9) получены из уравнений балансных законов сохранения для материальных систем. Условия (11) соответствуют законам сохранения для физических полей. Переход от условия (9) к условиям (11), если он реализуется, соответствует переходу от балансных законов сохранения для материальных систем к законам сохранения для физических полей. Возникновение физической структуры - сохраняющейся физической величины на псевдоструктуре есть результат такого перехода. Это показывает, что физические структуры генерируются материальными системами, а эволюционное соотношение (в дифференциальных формах), которое получается из уравнений, описывающих балансные законы сохранения, является управляющим соотношением.

Итак, физическая структура может возникнуть, во-первых, если коммутатор формы ω^p отличен от нуля, то есть, если материальная система испытывает несогласованные внешние воздействия. И, во-вторых, если имеются условия сопряжения внешней формы, то есть, материальная система имеет степени свободы. Однако, даже при выполнении этих условий физическая структура возникнет только в том случае, если условия сопряжения выполнятся, то есть если реализуются (в физическом процессе) степени свободы материальной системы.

Самоизменение состояния материальной системы под действием внутренней силы и может привезти к реализации степеней свободы. Причем произойти это может только спонтанно (в физическом процессе), так как обусловлено внутренними, а не внешними причинами (степени свободы являются характеристиками материальной системы, а не внешних воздействий).

Что происходит с внутренней силой при возникновении физической структуры? То есть, что происходит с коммутатором формы ω^p ?

<u>е) ***Переход внутренней силы в потенциальную.***</u> Рассмотрим эволюционное соотношение (5), где ω есть форма первой степени: $\omega = A_\alpha d\xi^\alpha$. Для реальных процессов $d\omega \neq 0$.

Допустим, что совершился переход от условия (9) с $d\omega \neq 0$ к условию (11) с $d_\pi\omega' = 0$, $d_\pi{}^*\omega' = 0$, то есть реализовалась некоторая псевдоструктура π, на которой сформировалась замкнутая форма. Из эволюционного соотношения на псевдоструктуре определяется дифференциал состояния $d_\pi\psi'$, что указывает на возникновение физической структуры.

Так как переход от условия (9) к условию (11) есть вырожденное преобразование, то происходит переход от сопутствующей системы координат к инерциальной: форма ω

определена на сопутствующем многообразии, а форма ω' реализуется относительно инерциальной системы координат.

Допустим, что на псевдоструктуре π можно ввести координаты y^j, $j=1,..,m$, где m - размерность псевдоструктуры. Тогда равный нулю дифференциал $d_\pi\omega'$ можно представить в виде: $d_\pi\omega' = d_\pi(p_j dy^j)$, где p_j - соответствующий импульс. Введем нормально к псевдоструктуре π координаты y^β, которые дополняют координаты на псевдоструктуре (но не являются сопряженными с координатами на псевдоструктуре). (Подробно о формировании псевдоструктур, о их размерности, о сопряженности координат и о переходе к метрическому пространству написано в пункте (**к**) и в приложении **6**). Неравный нулю дифференциал $d\omega = d(A_\alpha d\xi^\alpha)$ можно выразить через координаты y: $d(A_\alpha d\xi^\alpha) = d(p_j dy^j) + dw$, где dw - составляющая дифференциала, соответствующая координатам y^β. Поскольку $d(p_j dy^j) = 0$ (так как это дифференциал на псевдоструктуре), то $d\omega = dw$. Получается, что неравный нулю дифференциал формы ω проявляется в направлении, нормальном к псевдоструктуре.

Неизмеримая величина, описываемая коммутатором формы ω (или ее дифференциалом), которая действовала как внутренняя сила (в локальной области материальной системы), переходит в физическую величину, которая действует в направлении, нормальном к псевдоструктуре. Так как реализовавшаяся внешняя форма ω' является замкнутой формой (на псвдоструктуре), а замкнутая форма является внутренним (на псевдоструктуре) дифференциалом от потенциала, то есть потенциальной силой, то очевидно, что измеримая физическая величина, действующая в направлении, нормальном к псевдоструктуре, есть потенциальная сила. То есть возникновение физической структуры есть переход величины, действующей как внутренняя сила, в измеримую величину, которая действует как потенциальная сила. При этом если внутренняя сила действует внутри некоторой локальной области материальной системы (и заставляет ее деформироваться), то потенциальная сила действует на соседнюю область. Локальная область избавляется от своей внутренней силы и переводит ее во внешнюю силу, действующую на соседние области. Потенциальные силы так же как и внутренние силы возникают за счет несогласованных внешних воздействий. Но в отличие от внутренних сил потенциальные силы это внешние воздействия, переработанные материальной системой в измеримые физические величины. {Но при этом надо иметь в виду, что потенциальные силы, которым соответствует потенциал на псевдоструктуре, а не потенциал в метрическом пространстве, являются источником появления новых внутренних сил, во-первых, в соседних областях материальной системы, на которые действуют потенциальные силы (как внешние для этой области), а, во-вторых, величина потенциальной силы, соответствующей форме степени *к*, будет входить в коммутатор формы степени (*к-1*), что будет служить источником соответствующих этому коммутатору внутренних сил}.

Таким образом, величина, накопленная коммутатором неинтегрируемой формы ω^p, при возникновении физической структуры переходит в измеримую физическую величину, которая действует, как потенциальная сила в направлении, нормальном к псевдоструктуре. Потенциальная сила - это действие возникшего (квантового) образования на элементы материальной системы, в то время как внутренняя сила это взаимодействие между элементами материальной системы. Потенциальные силы описываются, например, скачками производных в направлении, нормальном к характеристикам, к потенциальным поверхностям и т. д..

Выше отмечалась двойственность замкнутой формы. С одной стороны она выступает как сохраняющийся объект (дифференциал замкнутой формы равняется нулю). С другой стороны - она выступает как потенциальная сила (она является дифференциалом). Эта двойственность имеет физический смысл. Замкнутая форма как сохраняющийся объект относится к физическому полю: сохраняющийся объект на псевдоструктуре - это элемент физического поля (примером является заряд), а замкнутая форма как потенциальная сила выступает по отношению к материальной системе.

Возникает вопрос, как физически проявляется переход внутренних сил в потенциальные и возникновение физической структуры.

ж) Формирование физической структуры. Возникновение измеримого, наблюдаемого, образования. Скорость перемещения образования относительно материальной системы. Реализация замкнутой формы (с равным нулю коммутатором) означает появление физической структуры - сохраняющегося объекта на псевдоструктуре. При этом неизмеримая величина, накопленная коммутатором, и действующая как внутренняя сила, переходит в измеримую величину - потенциальную силу. Физическая структура и измеримая величина, действующая как потенциальная сила, проявляются как спонтанно возникшее новое измеримое, наблюдаемое образование. {Это некоторое образование, не имеющее массы покоя (особый вид материи - физические поля[18]). Флуктуации, пульсации, волны, вихри, безмассовые частицы являются примерами таких образований.} Это образование выделяется спонтанно в физическом процессе из локальной области материальной системы и тем самым позволяет локальной области материальной системы избавится от внутренней силы и перейти в локально-равновесное состояние. Образование, сформировавшееся в некоторой локальной области материальной системы и выделившееся из нее, начинает воздействовать на соседнюю локальную область как некоторая внешняя для этой области сила. Но это внешнее воздействие выработано самой системой и поэтому оно является потенциальным, а не произвольным. {Это и есть потенциальная сила, величина которой определяется величиной коммутатора неинтегрируемой формы ω^p в момент возникновения образования. Направление действия потенциальной силы нормально к псевдоструктуре, то есть к интегрирующему направлению, вдоль которого формируется внутренний дифференциал - замкнутая форма. Замкнутая форма в этом случае не является точной из-за коммутатора неинтегрируемой формы. Для точной формы потенциальная сила равна нулю.} Соседняя область материальной системы перерабатывает это внешнее для нее воздействие. Если при этом снова выполнятся условия сопряжения, то соседняя область сформирует свое образование. Таким способом образование может перемещаться относительно материальной системы. (Примерами такого перемещения являются волны, безмассовые частицы.) Скорость перемещения образования относительно материальной системы, не есть некоторый параметр системы, а есть величина, которая реализуется каждый момент как условие сопряжения при перемещении образования относительно материальной системы. (Если условия сопряжения не реализуются, то измеримое образование перестает формироваться). Если материальная система однородная, то скорость будет принимать одни и те же значения (но это не есть постоянная величина, так как она формируется заново в каждый момент эволюционного процесса). Скорость звука, скорость электромагнитных волн, скорость света формируются таким образом. Очевидно, что скорость перемещения образования относительно материальной системы определяется внутренними свойствами системы. (Пример, скорость звука a: $a^2 = (dp/d\rho)_s$, где давление p и плотность ρ являются характеристиками материальной системы, а s указывает на постоянство энтропии. Скорость звука реализуется на псевдоструктуре, где сохраняющейся величиной - замкнутой формой, является энтропия.).

з) ***Характеристики возникшего образования (интенсивность, спин). Абсолютная и относительная скорости распространения образования. Уравнение псевдоструктуры - уравнение эйконала.*** Характеристики возникшего образования связаны с сформировавшейся замкнутой формой, коммутатором неинтегрируемой формы и свойствами материальной системы:

1) заряд - сохраняющийся объект (*замкнутая форма*),

2) скорость в инерциальной системе координат - абсолютная скорость распространения образования - псевдоструктура (*дуальная форма*, интегрирующее направление),

2`) скорость в сопутствующей системе координат - скорость распространения образования относительно материальной системы (*дополнительные условия, связанные со свойствами материальной системы*) (примеры: скорость звука, скорость света),

3) интенсивность - потенциальная сила (*значение первого члена коммутатора неинтегрируемой формы* в момент возникновение образования),

4) спин - (*второй член коммутатора неинтегрируемой формы, связанный с метрическим коммутатором*).

Рассмотрим это подробнее.

Спонтанно возникшее из неизмеримой величины измеримое наблюдаемое образование является некоторым дискретным (квантовым) образованием. Очевидно, что интенсивность такого образования определяется величиной, накопленной коммутатором неинтегрируемой формы к моменту возникновения этого образования (к моменту реализации вырожденного преобразования и формирования физической структуры) за счет несогласованных внешних воздействий (некоммутативность балансных законов сохранения). При этом первый член коммутатора, образованный перестановочными производными от коэффициентов формы, определяет интенсивность образования, а второй член, характеризующий деформацию сопутствующего многообразия (изгиб, кручение, кривизну) фиксируется как некоторая внутренняя характеристика возникающего образования. Спин является примером такой характеристики. Причем значение спина зависит от степени формы. Видно, что характеристики образования - интенсивность и спин определяются коммутатором неинтегрируемой формы.

Дуальная форма и дополнительные условия определяют абсолютную скорость распространения возникшего образования и скорость перемещения образования относительно материальной системы.

Так как замкнутая форма это сохраняющаяся величина на псевдоструктуре, то псевдоструктура является поверхностью уровня. Уравнение псевдоструктуры - это уравнение эйконала.

{Рассмотрим пример. Пусть $f(t,x^i)=0$, где t - эволюционная переменная, есть уравнение распространяющейся поверхности. Скорость распространения (абсолютная скорость - скорость относительно инерциальной системы) равна

$$P=-\frac{1}{g}\frac{\partial f}{\partial t},\quad g=\sqrt{\Sigma\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)^2}$$

В случае двух переменных

$$P=-\frac{\partial f}{\partial t}/\frac{\partial f}{\partial x},$$

Если при этом на поверхности сохраняется некоторая функция $s(t,x)=const$ (это есть замкнутая форма нулевой степени), то

$$P=-\left(\frac{\partial f}{\partial t}/\frac{\partial f}{\partial x}\right)_s=-\frac{dx}{dt}$$

То есть P есть производная неявной функции $x = x(t)$. Если известно значение dx/dt, то

$$\frac{\partial f}{\partial t} + P\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

где $P = dx/dt$, есть уравнение поверхности уровня - поверхности, на которой сохраняется некоторая величина. Это есть уравнение эйконала. В общем случае оно записывается в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + P\sqrt{\sum\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)^2} = 0$$

Так как псевдоструктура есть структура, на которой сохраняется физическая величина, то, очевидно, что уравнение эйконала есть пример уравнения псевдоструктуры, а P есть абсолютная скорость распространения (фронта) образования. Если образование перемещается по материальной системе, то относительная скорость (относительно элементов материальной системы - относительно сопутствующей системы координат)

$$a = P - u_n = P - \sum u_i \frac{\partial f}{\partial x^i} / g$$

где u_i - компоненты скорости элементов материальной системы, u_n - нормальная скорость. Если u_n равняется нулю, то $P = a$. Примерами скорости a являются скорость звука, скорость света, скорость электромагнитной волны, скорость рождающихся частиц и т.д..}

Можно показать, что уравнениями псевдоструктур являются уравнения характеристических поверхностей, поверхностей потенциалов (простого, двойного слоя), уравнения вычетов и т.д., полученные из уравнений математической физики. {В работах [19,22] показана связь уравнений одно, двух,.. эйконалов с уравнениями характеристик, с уравнением Гамильтона и т.д.}. Примерами псевдоструктур являются псевдоримановы и псевдоэвклидовы пространства. Механизм образования псевдоструктур лежит в основе формирования псевдометрических поверхностей и перехода их в метрические пространства (см. следующие пункты и приложение **6**). Следует отметить, что собственные значения, константы взаимодействий появляются как условия сопряжения внешних или дуальных форм, постоянные числа - как условия сопряжения точных форм.

и) *Интегрирование нетождественного эволюционного соотношения.* К вопросу об интегрировании эволюционного соотношения сводится вопрос о том, замкнутые формы какой степени может генерировать эволюционное соотношение, и вопрос о классификации физических структур.

Как известно, замкнутая форма является дифференциалом (внутренним или полным) от формы степени на единицу меньше. {Внутренним дифференциалом здесь, как уже отмечалось, называется дифференциал на некоторой пространственной структуре меньшей размерности, примером которой является псевдоструктура}. Такая связь позволяет проинтегрировать замкнутую форму и перейти к форме на единицу меньшей степени. Такие переходы возможны в тождественных соотношениях. Покажем, что интегрирование и переходы с понижением степени форм возможны и в нетождественных соотношениях (с неинтегрируемыми формами), но только при наличии вырожденного преобразования. Это можно показать на примере эволюционного соотношения. (Для удобства соотношение с неинтегрируемой формой степени k будем называть соотношением степени k.)

Допустим, что имеется нетождественное эволюционное соотношение второй степени (с формой степени $p=2$):

$$d\psi \cong \omega^2 \tag{12}$$

Допустим, что реализовалось вырожденное преобразование: переход от $d\omega^2 \neq 0$ к $d_\pi \omega`^2 = 0$, и сформировалась замкнутая форма $\omega`^2$ на псевдоструктуре π (о ее размерности будет сказано ниже). Из эволюционного соотношения на псевдоструктуре получится соотношение

$$d_\pi \psi = \omega`^2 \tag{13}$$

которое является тождественным, так как замкнутая форма есть дифференциал: $\omega`^2 = d_\pi \omega^1$. Подставляя выражение для $\omega`^2$ в (13), получим соотношение

$$d_\pi \psi = d_\pi \omega^1 \tag{14}$$

{Из соотношения (14) следует, что сформировался дифференциал $d_\pi\psi$ (степени $k = p = 2$), характеризующий состояние системы. Появление этого дифференциала указывает на возникновение физической структуры. Ей соответствует замкнутая форма $\omega`^2$ степени $k = p = 2$}. Соотношение (14) является тождественным, поэтому его можно проинтегрировать (по одной сформировавшейся, псевдометрической, размерности) и получить (с точностью до форм низших степеней) соотношение

$$\psi = \omega^1 \tag{15}$$

Здесь следует подчеркнуть, что полученная форма первой степени ω^1 является незамкнутой, так как ее дифференциал, как видно из формулы (14), не равен нулю.

Соотношение (15) можно записать нагляднее в виде

$$\psi^1 = \omega^1 \tag{15$'$}$$

где указывается степень полученного функционала ψ.

Теперь следует обратить внимание на одну тонкость. Чтобы полученный функционал ψ^1 характеризовал состояние системы, он ***должен быть дифференциалом***:

$$\psi^1 = d\psi^0 \tag{16}$$

Но из соотношения (15′) видно, что ψ^1 равняется незамкнутой форме ω^1 и ***не является дифференциалом***. Сравнение соотношений (15′) и (16) снова приводит к нетождественному соотношению

$$d\psi^0 \cong \omega^1 \tag{17}$$

но теперь уже для функционала состояния нулевой степени.

Получается, что интегрирование нетождественного эволюционного соотношения (соотношение (12)) понижает степень эволюционного соотношения и приводит снова к нетождественному соотношению (соотношение (17)).

Переходы от эволюционного соотношения степени p к соотношениям степеней $k = p-1$, $k = p-2$ и т.д. (которые возможны только, если реализуются вырожденные преобразования) можно назвать последовательным интегрированием нетождественного эволюционного соотношения. {При этом формируются замкнутые формы (на псевдоструктурах) соответственно степеней $k = p$, $k = p-1$, $k = p-2$,..., $k = 0$ (которые могут соответствовать физическим структурам). При условии вырождения могут быть переходы к точным формам. В частности, от формы нулевой степени возможен переход к точной форме нулевой степени. (Как уже отмечалось, элементам материальной системы соответствуют точные внешние формы нулевой степени).}

к) ***Топологические свойства внешних дифференциальных форм, входящих в эволюционное соотношение. Размерности псевдоструктур. Механизм формировании метрического пространства.*** Особенностью внешних форм, входящих в эволюционное соотношение, является то, что они определены на сопутствующих многообразиях, которые сами зависят от внешних форм. Метрическая форма сопутствующего многообразия и внешняя форма, определенная на этом многообразии, оказываются взаимосвязанными. Эта взаимосвязь осуществляется эволюционным соотношением через коммутаторы внешних и метрических форм {в коммутаторы внешних форм, определенных на недифференцируемых многообразиях, входят коммутаторы метрических форм}. (Именно такая взаимосвязь описывает механизм формирования метрических пространств).

При выводе эволюционного соотношения использовались две системы координат и соответственно два пространственных объекта. Одна система координат - инерциальная, связана с пространством, в котором находится материальная система, но которое не связано непосредственно с материальной системой. Это инерциальное пространство. Оно является метрическим. (Как будет показано ниже, оно формируется самой материальной системой). Вторая система координат - собственная, связана с сопутствующим многообразием. Это многообразие не является метрическим.

Как известно, степень форм не может быть больше размерности пространства. Поэтому, если размерность инерциального пространства равна n, то наибольшая степень формы будет равна n. Для материальной системы в таком пространстве действуют балансные законы сохранения, которые сворачиваются в эволюционное соотношение с формой степени p. В реальных процессах взаимодействуют практически все балансные законы сохранения, возможные для пространства данной размерности. Для заданной размерности n значение p практически будет максимальным, то есть будет $p=n$.

А теперь вспомним о свойствах неинтегрируемых форм. Если неинтегрируемая форма имеет степень k, то ее дифференциал (коммутатор неинтегрируемой формы) будет образовывать форму, степень которой будет на единицу больше. В пространстве размерности n эволюционное соотношение, как уже отмечалось, может иметь форму степени $p=n$. Если эта форма неинтегрируемая, то ее коммутатор будет соответствовать величине, которая действует в пространстве большей размерности, чем n. Допустим, что n=2 и p=2. Если форма ω^2 неинтегрируемая, то коммутатор этой формы будет действовать в пространстве размерности $n+i=2+i$ (здесь дополнительная размерность обозначена через мнимую единицу, так как она не коммутирует с другими размерностями). Это означает, что деформированное сопутствующее многообразие не будет укладываться в исходное инерциальное пространство размерности n. К чему это может привести?

В предыдущем пункте было показано, что эволюционное соотношение степени p может генерировать (при наличии вырожденных преобразований) замкнутые формы степени $0\le k\le p$ на псевдоструктурах. Размерности псевдоструктур зависят не только от степени внешних форм, но и от размерности пространства. При генерации замкнутых форм последовательных степеней $k=p,\quad k=p-1,\quad ....\quad ,\quad k=0$ получаются псевдоструктуры размерностей (n+1-k): 1,.., n+1. А при переходе к точной замкнутой форме нулевой степени получается метрическая структура размерности n+1. То есть получается, что исходное инерциальное пространство размерности n материальная система под влиянием внешних несопряженных воздействий (и при наличие степеней свободы) может переводить в пространство размерности

$n+1$. {Известно, что замкнутым внешним дифференциальным формам соответствуют кососимметричные тензоры ранга k, а соответствующим дуальным формам - псевдотензоры ранга ($N-k$), где N - размерность пространства. Псевдоструктуры соответствуют таким псевдотензорам, но на сформировавшимся пространстве, размерность которого равна $n+1$. То есть $N=n+1$}. В исходном пространстве размерности 0 может сформироваться пространство размерности 1. (Таким пространством может быть время). В пространстве размерности 1 - пространство размерности 2 (время и координата) и т.д.. В исходном пространстве размерности 3 может сформироваться пространство размерности 4 (время и 3 координаты). Такое геометрическое пространство сворачивается и новая размерность (геометрическая) уже не может реализоваться. (Здесь следует отметить, что каждая материальная система имеет свое время). {Примерами псевдоструктур являются сечения кокасательных расслоений (поля Янга-Милса), когомологии де Рама, сингулярные когомологии [9,12], псевдориманово и псевдоэвклидово пространства и т.д.. Примерами метрических многообразий, которые получаются при переходе к точным формам являются эвклидово и риманово пространства (см. приложение **6**). Следует еще раз подчеркнуть, что формирование псевдоструктур и переход к метрическому пространству (к точным формам) происходит через вырожденные преобразования (обращение в нуль таких выражений как якобианы, детерминанты, скобки Пуассона и т.д.)}. Формирование метрического пространства можно проследить по таблице1

ТАБЛИЦА 1

балансные законы сохранения	\\ n k \\ p ↓	**0** **0**	**1** **1**	**2** **2**	**3** **3**
массы ↑+	**3**				ω^{33} ⇓ ω'^{31}
момент количества движения ↑+	**2**			ω^{22} ⇓ ω'^{21}	ω^{23} ⇓ ω'^{22}

количество движения $\uparrow$+	**1**		ω^{11} $\Downarrow$ $\omega`^{11}$	ω^{12} $\Downarrow$ $\omega`^{12}$	ω^{13} $\Downarrow$ $\omega`^{13}$
энергии+времени (р=0) или импульса+координаты (р > 0)	**0**	ω^{00} $\Downarrow$ $\omega`^{01}$	ω^{01} $\Downarrow$ $\omega`^{02}$	ω^{02} $\Downarrow$ $\omega`^{03}$	ω^{03} $\Downarrow$ $\omega`^{04}$
точные формы $\rightarrow$		$\overline{\omega}^{01}$	$\overline{\omega}^{02}$	$\overline{\omega}^{03}$	$\overline{\omega}^{04}$
N $\rightarrow$		**1** время	**2** время+ 1 координ.	**3** время+ 2координ.	**4** время+ 3 координ.

Здесь k - степень сформировавшихся замкнутых форм, n - размерность исходного инерциального пространства. N - сформировавшаяся размерность. В первом столбце указаны взаимодействующие балансные законы сохранения. Стрелки показывают, что законы сохранения, указанные в данной ячейке, добавляются к законам сохранения, приведенным в нижних ячейках. Стрелки в 3-6 столбцах указывают на переход от неинтегрируемой формы к замкнутой. Второй индекс при неинтегрируемой форме ω указывает на размерность инерциального пространства n. Второй индекс при замкнутой форме $\omega`$ (штрих указывает на то, что форма замкнутая) соответствует размерности псевдоструктуры, а второй индекс при точной форме (черточка сверху) - сформировавшейся размерности пространственной структуры, соответствующей элементу материальной системы (точная форма соответствует элементам материальной системы). Внизу указаны координаты сформировавшейся пространственной структуры, соответствующей точной форме.

При $k=0$ в пространстве нулевой размерности импульса нет. Он проявляется с одномерного пространства. (В формах степени $k=0$ энергия и импульс формируются независимо друг от друга). При $k=0$ энергия и импульс не являются сопряженными.

Дуальными им формами являются соответственно время и координаты. (Время и координаты имеют разную природу, так как время является дуальным с энергией, а координаты с импульсом). Следует отметить, что энергия и время и, соответственно, импульс и координата не коммутируют между собой в рамках одной формы, так как относятся к разным формам: внешней и дуальной. {Перестановочные соотношения $\hat{q}\hat{p}-\hat{p}\hat{q}=ih$ отражают этот факт. Здесь левая часть перестановочных соотношений есть аналог значения коммутатора неинтегрируемой формы нулевой степени, а правая часть равна его значению в момент реализации замкнутой формы нулевой степени ($h=dw$, см. пункт **з**), мнимая единица указывает на трансверсальное направление по отношению к псевдоструктуре}. Время (числа?) формируется в безразмерном пространстве $(n=0)$ и сформировавшись образует одномерное пространство ($N=1$). В одномерном пространстве $(n=1)$ дополнительно к времени формируется одна координата и в результате формируется двумерное пространство ($N=2$) и т.д..

Замкнутая внешняя форма степени $k=1$ соответствует сопряжению энергии и импульса (энергия и импульс оказываются одновременно измеримыми величинами). В приложении 5 приведена подобная таблица для взаимодействий элементарных частиц.

к) ***Классификация физических структур.*** Для получения физических структур данного физического поля надо рассматривать соответствующую этому полю материальную систему. В частности, для получения термодинамических структур (флуктуаций, фазовых переходов и т.д.) надо рассматривать эволюционное соотношение для термодинамических систем (см. приложение **3**), для получения газодинамических структур (волн, скачков, вихрей. пульсаций и т. д.) - эволюционное соотношение для газодинамических систем (см. приложение **4**), для электромагнитного поля - соотношение, полученное из уравнений для заряженных частиц (см. приложение **2**). Для элементарных частиц аналогом такой материальной системы возможно является физический вакуум.

Как было показано выше, замкнутые формы, соответствующие физическим структурам, генерируются эволюционным соотношением, которое имеет параметр p, указывающий число взаимодействующих балансных законов сохранения. Поэтому физические структуры могут классифицироваться по параметру p.

Кроме этого, параметром является степень замкнутых форм. Как было показано выше, эволюционное соотношение степени p может генерировать замкнутые формы степени $0 \le k \le p$. Поэтому физические структуры могут классифицироваться и по параметру k.

Еще одним параметром является размерность пространства. Замкнутые внешние формы одной и той же степени, но реализованные в пространствах разной размерности, будут различаться, так как размерность псевдоструктур, на которых определены замкнутые формы зависит от размерности пространства. Размерность пространства таким образом тоже характеризует физические структуры. Но этот параметр определяет не тип физических структур, а их свойства (см. прил.5).

Таким образом, анализируя эволюционное соотношение, можно увидеть, что тип и свойства физических структур (и, соответственно, физических полей) для данной материальной системы, зависят от числа взаимодействующих балансных законов сохранения p, от степени k и от размерности пространства. Введя классификацию по p, k и по размерности пространства, можно понять внутреннюю связь различных физических полей и взаимодействий. {Это можно увидеть на примере таблицы взаимодействий для элементарных частиц, которая будет приведена в приложении 5).

Выводы. Здесь следует прежде всего подчеркнуть, что проведенный анализ эволюционного соотношения, полученного из балансных законов сохранения для материальных систем, является качественным, так как при анализе не рассматривался конкретный вид этого соотношения. Тем не менее такой анализ позволил увидеть следующее. Балансные законы сохранения (энергии, количества движения, момента количества движения и массы) для материальных систем из-за несогласованности внешних воздействий оказываются некоммутативными (на это указывает нетождественность эволюционного соотношения). Далее, из-за некоммутативности балансных законов сохранения состояние материальной системы оказывается неравновесным, что является причиной эволюционного процесса. (Величина внутренней силы определяется коммутатором неинтегрируемой формы, входящей в эволюционное соотношение). При дополнительных условиях, которые определяются свойствами материальной системы и реализуются в физических процессах, возможно сопряжение балансных законов сохранения (этому соответствует вырожденное преобразование), что указывает на переход внутренних сил в потенциальные и проявляется как появление каких-либо измеримых образований: флуктуаций, пульсаций, волн, вихрей, частиц и т.д.. Таков механизм возникновения физических структур, образующих физические поля. Характеристики и свойства физических структур, образующих физические поля, определяются характеристиками и степенями свободы материальной системы, свойствами балансных законов сохранения и их взаимодействием (что описывается свойствами неинтегрируемой внешней формы, топологическими свойствами коммутаторов внешней формы и метрической формы сопутствующего многообразия, свойствами нетождественного соотношения).

Результаты такого качественного анализа могут помочь при исследовании эволюционных процессов в конкретных материальных системах, и при исследовании конкретных физических полей (см. приложения (2-6)).

Проведенное исследование позволяет сделать вывод, что постулаты, лежащие в основе теории поля, есть выполнение условий сопряженности балансных законов сохранения для материальных систем, генерирующих физические поля. Этому соответствует формирование замкнутых форм, что означает выполнение законов сохранения для физических полей, и указывает на возникновение физических структур, образующих физические поля.

Следует еще раз подчеркнуть, что применялся математический аппарат, основанный на свойствах **неинтегрируемых внешних дифференциальных форм (форм, определенных на недифференцируемых многообразиях),** особенностью которого является появление нетождественных соотношений и вырожденных преобразований. Этот математический аппарат может быть использован и в качественной теории дифференциальных уравнений, что показано в приложении **1.**

<u>Приложение 1</u>.

Функциональные свойства решений дифференциальных уравнений. Уравнение Гамильтона-Якоби. Уравнение поля. Преобразования.

Применение внешних дифференциальных форм к качественному исследованию решений дифференциальных уравнений связано с тем, что внешние формы позволяют определить условия сопряженности различных элементов дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений, например, сопряженность частных производных от разных переменных в уравнениях с частными производными, сопряженность дифференциальных уравнений в системах дифференциальных уравнений, сопряженность производной и изменения начальных данных в обыкновенных дифференциальных уравнениях и т.д.. От того, выполняются или нет условия сопряженности и зависят функциональные свойства решений дифференциальных уравнений. {Внешние дифференциальные формы обладают одновременно и алгебраическими, и геометрическими, и дифференциальными, и интегральными, и топологическими и многими другими свойствами. Это объясняется их сложной внутренней структурой (однородность относительно базиса, кососимметричность, объединение элементов, каждый из которых состоит из двух объектов, имеющих разную природу: алгебраическую - коэффициенты формы, и геометрическую - составляющие базиса, и т. д.), структурной связью между формами различных степеней, зависимостью от размерности пространства и от топологии многообразия. При сопряженности элементов формы, объектов каждого элемента, форм разных степеней, внешней и дуальной форм и т.д. реализуются инвариантные свойства дифференциальных форм. Именно эти свойства имеют значение для качественного исследования дифференциальных уравнений.}

Основную идею качественного исследования решений дифференциальных уравнений можно проследить на примере дифференциального уравнения в частных производных первого порядка.

Пусть

$$F\left(x^i, u, p_i\right) = 0, \quad p_i = \partial u / \partial x^i \qquad (1)$$

есть дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка. Рассмотрим функциональное соотношение

$$du = \theta \qquad (2)$$

где $\theta = p_i dx^i$. Оказывается, что функциональное соотношение (2) может быть нетождественным (то есть производные дифференциального уравнения могут не образовывать дифференциал). Чтобы соотношение было тождественным, форма θ должна быть дифференциалом (поскольку левая часть является дифференциалом), то есть замкнутой формой. Для этого должен обращаться в нуль коммутатор формы $-K_{ij} = \partial p_j / \partial x^i - \partial p_i / \partial x^j$. То есть производные $p_i = \partial u / \partial x^i$ должны быть сопряженными. Однако из уравнения (1) не следует (явно), что производные $p_i = \partial u / \partial x^i$, удовлетворяющие уравнению (и заданным граничным или начальным условиям задачи), являются сопряженными. В общем случае, когда нет дополнительных условий, коммутатор формы θ не равен нулю. Это означает, что форма $\theta = p_i dx^i$ является незамкнутой внешней формой и не может быть дифференциалом. Функциональное соотношение (без дополнительных условий) оказывается нетождественным. А поскольку производные не образуют дифференциал, то соответствующее решение u дифференциального уравнения не будет функцией x^i. Оно будет зависеть от коммутатора формы θ, то есть будет функционалом.

Чтобы получить решения, которые являются функциями, надо к исходному уравнению добавить условие замкнутости формы $\theta = p_i dx^i$ и дуальной ей формы. (Функционал F в данном случае играет роль дуальной формы для формы θ). То есть надо рассмотреть систему уравнений[15]

$$\begin{cases} dF\left(x^i, u, p_i\right) = 0 \\ d\left(p_i dx^i\right) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Условие разрешимости такой системы (это есть система уравнений Пфаффа) будет условием, при котором полученное решение будет функцией.

Если в системе уравнений (3) раскрыть дифференциалы, то получится система однородных уравнений относительно дифференциалов dx^i, dp_i (левые части становятся внешними формами в пространстве размерности $2n$ - исходном и касательном):

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial F}{\partial x^i}+\dfrac{\partial F}{\partial u}p_i\right) dx^i+\dfrac{\partial F}{\partial p_i}\ \ dp_i=0 \\ \qquad\qquad dp_i\ \ dx^i-dx^i\ \ dp_i=0 \end{cases} \qquad (4)$$

Условия разрешимости такой системы (равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при dx^i, dp_i) имеют вид

$$\frac{dx^i}{\partial F/\partial p_i}=\frac{-dp_i}{\partial F/\partial x^i+p_i\partial F/\partial u} \qquad (5)$$

Эти условия определяют интегрирующее направление, то есть псевдоструктуру, на которой форма $\theta = p_i dx^i$ оказывается замкнутой и становится дифференциалом. В результате соотношение (2) оказывается тождественным. При выполнение условий (5) производные образуют дифференциал и решение становится функцией. Именно такими решениями, которые являются функцией на некоторых псевдоструктурах (при реализации дополнительных условий), являются, так называемые, обобщенные решения[23]. Так как функции, являющиеся обобщенными решениями, определены только на псевдоструктурах (а не на всем пространстве координат), то они имеют разрывы производных. (Порядок производных, имеющих разрывы, равен степени внешней формы, входящей в соответствующее функциональное соотношение. Если в функциональное соотношение будет входить форма нулевой степени, то может иметь разрывы сама функция, соответствующая обобщенному решению). Еще раз следует подчеркнуть, что условия (5) (условия интегрируемости) являются теми условиями, которые из всех производных p_i, удовлетворяющих уравнению (1), выделяют производные, образующие дифференциал, то есть замкнутую форму. Для производных, удовлетворяющих условию

(5), $\delta u = p_i dx^i = du$. Для производных, не удовлетворяющих условию (5), выражение $p_i dx^i$ не является дифференциалом, так как коммутатор $\partial p_j / \partial x^i - \partial p_i / \partial x^j$ не равен нулю.

Если выделить одну переменную x^1 и ввести обозначения $t = x^1$, то условия (5) можно записать в виде

$$\frac{dx^j}{dt} = \frac{\partial F / \partial p_j}{\partial F / \partial p_1}, \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial F / \partial x^j + (\partial F / \partial u) p_j}{\partial F / \partial p_1} \qquad (6)$$

Если вернуться снова к уравнению (1) и попытаться найти характеристики этого уравнения, то окажется, что условия (5) и, соответственно, (6) являются уравнениями характеристик[24] для уравнения (1). То есть характеристики являются примерами тех псевдоструктур, на которых производные дифференциального уравнения образуют замкнутые формы и на которых, следовательно, решения являются функциями. (Характеристические многообразия уравнения (1) являются псевдоструктурами π, на которых форма $\theta = p_i dx^i$ становится замкнутой: $\theta_\pi = d_\pi u$).

Здесь следует подчеркнуть, что координаты, являющиеся решением уравнений характеристик, не тождественны координатам в исходном уравнении (1), которые являются независимыми. Переход от координат исходного пространства к характеристическому многообразию является **вырожденным** преобразованием - обращается в нуль определитель системы уравнений (4). При этом для производных уравнения (1) происходит переход от касательного пространства к кокасательному. Переход от касательного пространства, где коммутатор формы θ не равен нулю (форма незамкнутая, производные не образуют дифференциал) к характеристическому многообразию - кокасательному пространству, где коммутатор формы обращается в нуль (форма замкнутая, производные образуют дифференциал) является примером вырожденного преобразования (особенности такого перехода рассмотрены ниже для уравнения поля). Такой переход и является примером вырожденного преобразования (особенности такого перехода рассмотрены ниже для уравнения поля). {Если обозначить касательное пространство, соответствующее соотношению, через M, то характеристическое многообразие будет касательным расслоением TM, а замкнутой форме будет соответствовать кокасательное расслоение $T^{*}M$ (соответствие с полями Янга-Милса).}

Было проанализировано дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка и рассмотрено функциональное соотношение с формой первой степени. (Здесь следует отметить, что для этого уравнения следует записать и проанализировать еще и функциональное соотношение с формой нулевой степени). Для обыкновенных дифференциальных уравнений коммутатор получается за счет несопряженности производных от искомых функций и от начальных данных (коммутатором определяется зависимость решения от начальных данных). Подобными функциональными свойствами обладают решения всех дифференциальных уравнений. При этом, если порядок дифференциального уравнения равен k, то такому уравнению соответствует (k+1) функциональное соотношение, каждое из которых содержит внешние формы одной из степеней: k, k-1,.., 0. Подобным образом можно исследовать решения и систем дифференциальных уравнений. Можно показать, что решения уравнений математической физики (на которые не накладываются извне дополнительные условия) являются функционалами. Решения оказываются точными только при реализации дополнительных условий (вырожденные преобразования): обращение в нуль детерминантов, якобианов, скобок Пуассона, т.д., определяющих интегральные поверхности, примерами которых являются характеристические многообразия, огибающие характеристик, особые точки, поверхности потенциалов простого, двойного слоя и т.д..

Здесь можно сказать несколько слов об обобщенной задаче Коши, когда начальные условия задаются на некоторой поверхности. Так называемое "единственное" решение задачи Коши, когда можно определить выводящие производные (когда определитель, составленный из выражений при этих производных, не равен нулю), является функционалом, так как полученные таким образом производные оказываются несопряженными - их смешанные производные образуют неравный нулю коммутатор, и решение зависит от этого коммутатора.

Зависимость решения от коммутатора может привести к неустойчивости решения. Неустойчивые решения могут быть у уравнений, у которых нет условий интегрируемости (таких, например, условий интегрируемости, как характеристики, особые точки, интегрирующие множители и т.д.). Неустойчивые решения появляются в том случае, когда дополнительные условия не реализуются и не формируются точные решения. Так могут быть неустойчивыми решения уравнений эллиптического типа.

Как известно, в основе качественной теории дифференциальных уравнений лежит анализ неустойчивых решений и условий интегрируемости. Видно, что по существу это сводится к вопросу о том, при каких условиях функциональное соотношение, соответствующее дифференциальному уравнению (соотношение типа (2)) оказывается тождественным, и являются ли решения уравнения функционалами или нет. К этому же сводится и анализ корректности постановки задач.

Тип решения дифференциального уравнения играет существенную роль при описании физических процессов.

Так как потенциалам и законам сохранения должны соответствовать замкнутые формы, то им могут соответствовать только решения, производные которых образуют замкнутую форму, то есть решения, которые не являются функционалами.

Возникает вопрос, имеют ли физический смысл решения, которые являются функционалами, и которым соответствуют незамкнутые формы?

Как было показано выше, для уравнений математической физики, описывающих балансные законы сохранения (энергии, количества движения, момента количества движения и массы) для материальных систем функциональное соотношение может быть приведено к виду $d\psi = \omega^p$, где ψ - функционал состояния, ω^p- неинтегрируемая форма, полученная из производных уравнений балансных законов сохранения. Степень формы - p равняется числу взаимодействующих уравнений. (Можно заметить, что функциональное соотношение (1) такого же типа, где $p=1$). Это функциональное соотношение, как было показано выше является нетождественным, так как форма ω^p, стоящая в правой части, является неинтегрируемой и не может быть дифференциалом, как левая часть. Это означает, что решения уравнений балансных законов сохранения являются функционалами. Такие решения соответствуют неравновесным состояниям материальной системы, с внутренней силой, описываемой коммутатором неинтегрируемой формы. Переход от решения - функционала, к решению - не функционалу (что возможно при вырожденном преобразовании), соответствует переходу внутренней силы, которой соответствует коммутатор неинтегрируемой формы, в потенциальную силу, которой соответствует замкнутая форма.

Так как тип решения определяет характер физического процесса, то при описании физических процессов необходимо исследовать тип решений дифференциальных уравнений, описывающих эти процессы. То есть надо знать, образуют ли (и при каких условиях) производные от решения дифференциального уравнения замкнутые формы или нет.

Вернемся снова к анализу уравнения (1). Если уравнение (1) не зависит явно от u и разрешено относительно одной переменной, например, t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+H\left(t,x^{j},p_{j}\right)=0,\quad p_{j}=\frac{\partial u}{\partial x^{j}} \tag{7}$$

то условия интегрируемости (6) принимают вид (в этом случае $\partial F/\partial p_1=1$)

$$\frac{dx^{j}}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_{j}},\quad \frac{dp_{j}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x^{j}} \tag{8}$$

Условия (8), как известно, называются каноническими соотношениями. То есть канонические соотношения это уравнения характеристик для уравнения (7) и условия интегрируемости этого уравнения (существования замкнутой формы).

Уравнение (7), где H удовлетворяет каноническим соотношениям (8), называется уравнением Гамильтона-Якоби. Производные этого уравнения, на которые наложено дополнительное условие - канонические соотношения, образуют замкнутую форму:

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial t}dt + p_j dx^j = -Hdt + p_j dx^j = du$$

Это означает, что решения такого уравнения являются функциями, а не функционалами. Уравнение такого типа, производные которого образуют замкнутую форму (что может соответствовать законам сохранения), может быть уравнением инвариантной теории поля.

Уравнением Гамильтона-Якоби, то есть интегрируемым уравнением, является в теории поля уравнение

$$\frac{\partial s}{\partial t} + H\left(t, q_j, \frac{\partial s}{\partial q_j}\right) = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial q_j} = p_j \qquad (9)$$

где s есть функция поля для функционала $S = \int L dt$. Здесь L - функция Лагранжа, а H - функция Гамильтона: $H(t, q_j, p_j) = p_J q'_j - L$, $p_j = \partial L / \partial q'_j$. Уравнению (9) соответствует замкнутая форма $ds = Hdt + p_j dq_j$ (инвариант Пуанкаре).

На примере уравнения поля можно рассмотреть особенности вырожденного преобразования, примером которого является переход от функции Лагранжа к функции Гамильтона. Уравнение для функции Лагранжа - вариационное уравнение Эйлера, получено из условия $\delta S = 0$, где S - функционал действия. При этом величина δS в реальном случае (когда силы непотенциальные или связи неголономные) не является замкнутой формой, то есть $d\delta S \neq 0$. Функция же Гамильтона получается из условия $d\delta S = 0$, что является условием замкнутости формы δS. Переход от функции Лагранжа L к функции Гамильтона $H = p_j q_j - L$ (переход от переменных q_i, q_i' к переменным $q_i, p_i = \partial L / \partial q_i'$) есть переход от касательного пространства, где форма незамкнутая - дифференциал от формы не равен нулю, к кокасательному пространству с замкнутой формой - дифференциал от которой равен нулю. Видно, что такой переход является вырожденным.

Здесь следует обратить внимание на следующий момент. В существующих (инвариантных) теориях поля используются только невырожденные преобразования - преобразования, которые сохраняют дифференциал. Оказывается, что вырожденные и невырожденные преобразования связаны между собой. Это можно показать на примере канонических соотношений. В теории поля канонические соотношения, которым удовлетворяет функция Гамильтона, описывающая физические поля, как известно, являются невырожденными (сохраняющим дифференциал) касательными преобразованиями. В то же время, канонические соотношения для уравнения Гамильтона-Якоби без дополнительных условий являются уравнениями характеристик. А характеристикам соответствуют вырожденные преобразования (для характеристик получается система однородных уравнений, которая имеет нетривиальное решение только при детерминанте равном нулю). Получается, что канонические соотношения с одной стороны соответствуют невырожденным преобразованиям, а с другой стороны - вырожденным преобразованиям. Вырожденное преобразование - это, как было показано, есть переход от пространства (q_i, q_i') к характеристическому многообразию (q_i, p_i): переход от касательного пространства к кокасательному. Именно такое преобразование соответствует возникновению физической структуры. А невырожденное преобразование - это переход от одного характеристического многообразия (q_i, p_i), описываемого каноническими соотношениями, к другому характеристическому многообразию Q_i, P_i, тоже удовлетворяющему каноническим соотношениям. Это соответствует переходу от одной физической структуры к другой физической структуре. Вырожденное преобразование есть переход от многообразия, соответствующего материальной системе, к физическим структурам, соответствующим физическим полям. То есть вырожденное преобразование есть переход от материальной системы к физическому полю (именно при таких переходах и возникают физические структуры). А невырожденное преобразование это переход от одной физической структуры к другой физической структуре, и касается оно только физического поля. Канонические соотношения - пример двойственности, которая имеет отношение к реальным процессам, и раскрывается с помощью внешних дифференциальных форм. Точно также можно показать двойственность соотношений, осуществляющих такие преобразования как касательные, контактные, калибровочные, канонические, камфорные отображения и т.д..

Приложение 2.

Электромагнитное поле.

Как известно[9], электромагнитное поле представляется некоторой 2-формой. В (x,y,z,t) - пространстве это может быть форма:

$$\omega^2 = \left(\mathbf{E}_x dx + \mathbf{E}_y dy + \mathbf{E}_z dz\right)dt + \mathbf{H}_x dydz - \mathbf{H}_y dxdz + \mathbf{H}_z dxdy$$

которая является локально постоянной, то есть $d\omega^2 = 0$. Здесь $\mathbf{E},\mathbf{H}$ - соответственно электрическая и магнитная напряженности поля. Дуальная форма определяется (в метрике Лоренца) как

$$^*\omega^2 = -\left(\mathbf{H}_x dx + \mathbf{H}_y dy + \mathbf{H}_z dz\right)dt + \mathbf{E}_x dydz - \mathbf{E}_y dxdz + \mathbf{E}_z dxdy$$

Уравнения Максвелла сводятся к тому, что обе формы замкнуты:

$$\begin{cases} d\omega^2 = 0 \\ d^\bullet\omega^2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Из условия замкнутости следует, что форма ω^2 должна быть дифференциалом от потенциала. Простейшим примером[9] такого потенциала является кулоновский потенциал с зарядом q, сосредоточенным в начале координат. Форма ω^2, соответствующая этому потенциалу, имеет вид

$$\omega^2 = -qd\left(\frac{1}{r}\cdot dt\right). \tag{2}$$

где $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \neq 0$,

Если условие замкнутости формы ω^2 выполняется тождественно, то есть дифференциал является полным (форма точная), то в этом случае интеграл по замкнутому пути от формы будет равняться нулю (форма будет когомологически тривиальной), и, следовательно, заряд должен равняться нулю. Заряд может быть отличен от нуля в том случае, если дифференциал в формуле (2) является внутренним на некоторой псевдоструктуре (то есть форма ω^2 является замкнутой, но не является точной). Для данной задачи имеется нетривиальное решение, когда дуальная форма задается формулой[9]

$$ {}^*\omega^2 = \frac{q}{4\pi}\frac{x\,dy\,dz - y\,dx\,dz + z\,dx\,dy}{r^3} \qquad (3) $$

Условия замкнутости этой формы определяют псевдоструктуру. Интеграл по замкнутому пути в этом случае будет равняться заряду. (Заряд определяется когомологическим классом[12]).

В рассмотренном случае предполагалось, что форма ω^2 является замкнутой (предполагалось, что имеется потенциал). Рассмотрим, выполняется ли это в реальных процессах и если выполняется, то при каких условиях.

Если использовать силу Лоренца $\mathbf{F} = \mathbf{E} + [\mathbf{U}\times\mathbf{H}]/c$, то локальное изменение энергии и количества движения заряженного вещества (материальной системы) можно записать соответственно в виде[25]: $\rho(\mathbf{U}\cdot\mathbf{E})$, $\rho(\mathbf{E} + [\mathbf{U}\times\mathbf{H}]/c)$, где ρ - плотность электрического заряда, $\mathbf{U}$ - скорость заряженного вещества. Это изменение энергии и количества движения вызвано энергетическими и силовыми воздействиями и равняется соответственно величине этих воздействий. Если эти воздействия обозначить соответственно через Q^e, $\mathbf{Q}^i$, то балансные законы сохранения можно записать в следующем виде:

$$ \begin{aligned} &\rho(\mathbf{U}\cdot\mathbf{E}) = Q^e \\ &\rho(\mathbf{E} + [\mathbf{U}\times\mathbf{H}]/c) = \mathbf{Q}^i \end{aligned} \qquad (4) $$

При каких условиях из этих уравнений реализуются замкнутые формы? Используя уравнения Максвелла-Лоренца[25] (рассмотрим случай, когда эти уравнения справедливы), левые части уравнений (4) можно выразить только через напряженности электромагнитного поля (через величины электромагнитного поля, исключив характеристики материальной системы - заряженного вещества: ρ и $\mathbf{U}$) и записать уравнения (4) в виде

$$c\,div\,\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} I + Q^e \tag{5}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{S} = \mathbf{G} + \mathbf{Q}^i \tag{6}$$

где $\mathbf{S} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$ - вектор Пойтинга, $I = (E^2 + H^2)/2$,
$\mathbf{G} = \mathbf{E}div\mathbf{E} + grad(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}) - (\mathbf{E}\cdot grad)\mathbf{E} +$
$grad(\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}) - (\mathbf{H}\cdot grad)\mathbf{H}$.

Уравнение (5) широко используется при описании электромагнитного поля и вычисления энергии электромагнитного поля - вектора Пойтинга. А уравнение (6) практически не учитывается. В действительности же, вектор Пойтинга $\mathbf{S}$ должен удовлетворять одновременно двум уравнениям, которые сворачиваются в **соотношение**

$$d\mathbf{S} = \omega^2 \tag{7}$$

где коэффициентами формы ω^2 являются правые части уравнений (5,6). Это и есть эволюционное соотношение для системы заряженных частиц (которая и генерирует электромагнитное поле).

Из уравнений (5,6) можно определить вектор Пойтинга, если эти уравнения согласованы, то есть, если коммутатор, образованный перестановочными производными, равен нулю. Этот коммутатор является и коммутатором формы ω^2. Если коммутатор формы ω^2 равен нулю, то есть $d\omega^2 = 0$, то форма замкнута и является дифференциалом от формы первой степени. Соотношение становится тождественным, что позволяет определить вектор Пойтинга как сохраняющуюся измеримую физическую величину. Если же коммутатор не равен нулю, то правая часть не является дифференциалом и вектор Пойтинга является некоторым функционалом. Как измеримая величина он может сформироваться только на некоторой псевдоструктуре (таким является фронт электромагнитной волны), если реализуются вырожденные преобразования.

Выберем локальные координаты l_k так, чтобы одно направление l_1 совпадало с направлением вектора $\mathbf{S}$. Поскольку выбранное направление совпадает с направлением вектора $\mathbf{S} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$ и соответственно перпендикулярно векторам $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, то получается, что $div\mathbf{S} = \partial S / \partial l_1$, где S есть модуль вектора $\mathbf{S}$. Кроме того, можно убедиться, что проекция вектора $\mathbf{G}$ на выбранное направление равна $\partial I / \partial l_1$. В результате, выделяя из векторного уравнения (6) его проекцию на выбранное направление, уравнения (5,6) можно записать в виде:

$$\frac{\partial S}{\partial l_1} = -\frac{1}{c}\frac{\partial I}{\partial t} - \frac{1}{c}Q^e \qquad (8)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = c\frac{\partial I}{\partial l_1} - c\mathbf{Q}`^i \qquad (9)$$

$$0 = -\mathbf{G}`` - c\mathbf{Q}``^i$$

Здесь один штрих относится к проекции на направление l_1, два штриха - на другие направления.

При условии $dl_1 / dt = c$ из уравнений (8,9) можно получить

$$\frac{\partial S}{\partial l_1}dl_1 + \frac{\partial S}{\partial t}dt = dS = -\left(\frac{\partial I}{\partial l_1}dl_1 + \frac{\partial I}{\partial t}dt\right) - \left(Q^i dt + \mathbf{Q}`^e dl_1\right)$$

(10)

Так как последний член выражения не может быть дифференциалом (так как энергетические и силовые воздействия имеют разную природу и не могут оказаться сопряженными), то полученное соотношение оказывается нетождественным. Однако при условии

$$\frac{dl_1}{dt} = -\frac{\partial S / \partial t}{\partial S / \partial l_1}$$

(на псевдоструктуре) $dS = 0$ и модуль S вектора Пойтинга оказывается измеримой величиной. Но поскольку $dl_1 / dt = c$, то модуль вектора Пойтинга может быть измеримой величиной, если

$$c = -\frac{\partial S / \partial t}{\partial S / \partial l_1} \qquad (11)$$

То есть константа c, которая вводится в уравнения Максвелла, определяется как интегрирующее направление. Из соотношения (10) следует, что при $dS = 0$

$$\left(\frac{\partial I}{\partial l_1} dl_1 + \frac{\partial I}{\partial t} dt\right) - \left(Q^i dt + \mathbf{Q}`^e dl_1\right) = 0$$

то есть

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \mathbf{Q}`^e, \quad \frac{\partial I}{\partial l_1} = -Q^i$$

То есть локальные энергетические и силовые воздействия на материальную систему (заряженное вещество) переходят в величины электромагнитного поля - в энергию электромагнитной волны, распространяющейся со скоростью c, величина которой определяется условием (11). Видно, что константа c, входящая в уравнение Максвелла, является скоростью электромагнитной волны и определяется как интегрирующее направление.

Приложение 3.

Анализ начал термодинамики

Основу термодинамики составляют первое и второе начала термодинамики, которые были введены как постулаты. Первое начало может быть записано в виде

$$dE + \delta w = \delta Q \qquad (1)$$

где dE - изменение энергии термодинамической системы, δw - работа, совершенная системой (это значит, что δw выражается через параметры системы), δQ - тепло, подведенное к системе (то есть внешние воздействия на систему). Видно, что подведенное к системе тепло вызывает изменение энергии системы и совершение системой работы. Так как член δw должен выражаться через параметры системы и характеризует реальное, а не виртуальное изменение, то его следует обозначить через dw и записать первое начало термодинамики в виде

$$dE + dw = \delta Q \qquad (1')$$

Если работа, совершаемая системой, производится через сжатие, то $dw = pdV$, где p и V - давление и объем, и соотношение (1) принимает вид

$$dE + pdV = \delta Q \qquad (2)$$

В чем отличие первого начала термодинамики от балансных законов сохранения энергии и количества движения?

Балансный закон сохранения энергии (изменение энергии системы в зависимости от энергетических воздействий на систему) для термодинамической системы можно записать в виде

$$dE = \delta Q + \delta\vartheta \qquad (3)$$

где через $\delta\vartheta$ обозначены другие, кроме притока тепла, энергетические воздействия. Балансный закон сохранения количества движения (изменение количества движения системы в зависимости от силовых, механических, воздействий на систему) для термодинамической системы можно записать в виде

$$dw = \delta W \qquad (4)$$

Здесь δW обозначает силовое (механическое) воздействие на систему (например, внешнее сжатие системы, влияние границ и т.д.).

Если свернуть соотношения (3) и (4), то получится соотношение

$$dE + dw = \delta Q + \delta\vartheta + \delta W \qquad (5)$$

Сравнивая соотношение (5) с соотношением (1′), можно увидеть, что они совпадают, если внешними воздействиями на термодинамическую систему является только подвод тепла ($\delta W = 0$ и $\delta\vartheta = 0$). То есть первое начало термодинамики -

является частным случаем соотношения (5), которое получается из балансных законов сохранения энергии и количества движения.

Таким образом, первое начало термодинамики получается из балансных законов сохранения энергии и количества движения при условии, что имеется только подвод тепла. Оно учитывает взаимодействие двух балансных законов сохранения, а не является просто законом сохранения энергии.

Из приведенных соотношений видно, что первое начало термодинамики определяет изменение физических величин термодинамической системы (энергии и количества движения) в зависимости от притока тепла (в общем случае - от внешних воздействий). А это может характеризовать состояние термодинамической системы.

Как известно, система переходит из одного равновесного состояния в другое, если изменения физических величин согласованны, то есть образуют дифференциал.

Реализуется ли это в реальных процессах? Рассмотрим соотношение (1′), соответствующее первому началу термодинамики Левая часть соотношения состоит из дифференциалов, тем не менее суммарно она не является дифференциалом, так как входящие в соотношение дифференциалы зависят от разных переменных: первый член определяется переменными, характеризующими внутреннее строение элемента, а второй член - переменными, характеризующими взаимодействие элементов (как, например, давление). Может ли она стать дифференциалом? Так как соотношение (1′) является эволюционным, то левая часть соотношения может меняться в соответствии с правой частью. Однако правая часть соотношения представляет собой некоторое внешнее воздействие (приток тепла) и не может быть дифференциалом. Значит непрерывным образом, изменения физических величин (левая часть соотношения) не могут стать сопряженными, то есть образовать дифференциал. А это указывает на неравновесное состояние термодинамической системы. {Это является результатом того, что балансные законы сохранения энергии и количества движения, из которых получено первое начало термодинамики, не коммутируют между собой (полученные в соответствии с ними приращения не образуют дифференциал)}.

Таким образом из первого начала термодинамики следует, что приращения физических величин оказываются несопряженными (некоммутативность балансных законов сохранения) и состояние термодинамической системы - неравновесным.

Может ли реализоваться равновесное состояние термодинамической системы? Может ли левая часть соотношения (1′), соответствующего первому началу термодинамики, стать дифференциалом? {Может ли соотношение (1′) стать тождественным и интегрируемым?}. Ответ на этот вопрос дает второе начало термодинамики.

Второе начало термодинамики утверждает следующее. Если система находится при постоянной температуре T и совершает переход в другое состояние благодаря тепловому взаимодействию δQ, то $\delta Q\ /\ T$ - есть полный дифференциал от некоторой величины S, которая называется энтропией, то есть

$$\delta Q\ /\ T = dS \tag{10}$$

Далее. Второе начало термодинамики утверждает, что если в системе могут происходить необратимые процессы, то

$$dS > \delta Q\ /\ T \tag{11}$$

Соотношения (10) и (11) - это выражение второго начала термодинамики.

Что такое энтропия? Что такое температура? В чем смысл второго начала термодинамики? Как связаны первое и второе начала термодинамики? И какую роль играет при этом эволюционное соотношение, полученное в данной работе?

Выше было показано, что первое начало термодинамики, которое принимается как постулат, в действительности получается из балансных законов сохранения. Что можно сказать о втором начале термодинамики, которое тоже вводится как постулат?

В основе второго начала термодинамики лежит следующее положение. Чтобы физические величины могли стать измеримыми величинами одной и той же системы и определять ее состояние (без внутренних сил), приращения этих величин должны быть согласованными (сопряженными) - они должны образовывать дифференциал. То есть должно иметь место

$$dE + dw = d\psi \tag{12}$$

Сравнивая (12) и (1′) видим, что форма $dE+dw$ с одной стороны, чтобы соответствовать измеримым величинам, должна быть дифференциалом, а, с другой стороны, по первому началу термодинамики должна равняется форме δQ, которая не является дифференциалом. Если в соотношении (12) заменить форму $dE+dw$ ее значением δQ из соотношения (1′), то для $d\psi$ получится соотношение $d\psi=\delta Q$, которое является нетождественным (так как форма δQ не является замкнутой формой и, следовательно, не является дифференциалом). В случае, когда внешними воздействиями является не только приток тепла, вместо соотношения (1′) надо рассматривать соотношение (5). В этом случае, из (12) и (5), получается нетождественное соотношение $d\psi=\delta Q+\delta\vartheta+\delta W$. Так как полученные соотношения являются нетождественными, то вместо знака = следует использовать знак $\cong$ и записать полученные соотношения в виде

$$d\psi\cong\Omega \qquad (13)$$

где $\Omega=\delta Q+\delta\vartheta+\delta W$.

Соотношение (13) получается из соотношения (5), которое характеризует взаимодействие балансных законов сохранения и частным случаем которого является первое начало термодинамики, и из положения (12), которое означает, что для устойчивого, без внутренних сил, состояния системы приращения физических величины должны быть сопряженными. Это и есть эволюционное соотношение для термодинамической системы.

Исходя из свойств эволюционного соотношения, которые были изложены в параграфе 2, можно увидеть особенности термодинамических начал и их связь между собой. Прежде всего из соотношения (13) видно, что приращения физических величин, полученные в соответствии с первым началом термодинамики, оказываются не сопряженными: дифференциал $d\psi$ без дополнительных условий не формируется (первое начало термодинамики является неинтегрируемым соотношением; это и результат его особенности: члены левой и правой частей соотношения имеют разную природу: левая часть - это изменение физических величин самой системы, а правая -

некоторое внешнее воздействие на систему), что указывает на неравновесное состояние термодинамической системы. Реализация дополнительных условий (условий интегрируемости), что соответствовало бы переходу в локально-равновесное (без внутренних сил) состояние, как было показано выше на основе свойств дифференциальных форм, возможна в термодинамическом процессе (вызванном внутренними силами) благодаря степеням свободы термодинамической системы. При этом, как было показано выше, формируется внутренний (при дополнительных условиях) дифференциал. Именно этому моменту и соответствует второе начало термодинамики.

Примером дополнительных условий является наличие интегрирующего множителя. Рассмотрим случай, когда $dw = pdV$. Тогда $dE + dw = dE + pdV$. Известно, что форма $dE + pdV$ может стать дифференциалом, если имеется интегрирующий множитель (величина, зависящая только от характеристик системы) $1/\theta = pV / R$, которая получила название термодинамической температуры T [26]. В этом случае форма $(dE + pdV)/T$ оказывается дифференциалом (внутренним) от некоторой величины, которая и называется энтропией S:

$$(dE + pdV)/T = dS \qquad (14)$$

Допустим, что имеется интегрирующий множитель $1/\theta = T$, то есть выполняется соотношение (14). Если воздействиями на систему является только подвод тепла, то есть $dE + pdV = \delta Q$ (соотношение (2)), то из (14) следует

$$dS = \delta Q / T \qquad (15)$$

что соответствует второму началу термодинамики (соотношение (10)) для обратимых процессов. Если, кроме подвода тепла, система испытывает какие-либо механические воздействия δW (например, влияние границ), то из соотношения (14) в соответствии с соотношением (5) получается

$$dS = (dE + pdV)/T = (\delta Q + \delta W)/T \qquad (16)$$

откуда следует, что

$$dS > \delta Q \,/\, T \qquad (17)$$

что соответствует второму началу для необратимых процессов (соотношение (11)).

Соотношения (15) и (17), которые можно записать в виде

$$dS \geq \delta Q \,/\, T \qquad (18)$$

выражают второе начало термодинамики.

Эти соотношения были получены из соотношения (14). Соотношение (14) является примером тождественного соотношения, которое следует из соотношения (13) (когда внешними воздействиями является только подвод тепла) при дополнительном условии, каким является наличие интегрирующего множителя. Следует иметь в виду, что в соотношениях (14), (15), (17) и (18) дифференциалы не являются полными. Они выполняются только при наличии интегрирующего множителя - температуры, которая выражается через характеристики системы.

(Эволюционное соотношение (13) для термодинамической системы объединяет свойства первого и второго начало термодинамики. При этом второе начало термодинамики для обратимых процессов является решением эволюционного соотношения (то есть замкнутой формой, которая получается из эволюционного соотношения при реализации дополнительных условий - условий интегрируемости) для термодинамической системы. В случае, когда дополнительным условием является интегрирующий множитель, замкнутой формой становится дифференциал от энтропии, но не сама энтропия. Энтропия в этом случае выступает как термодинамический потенциал (функция состояния). Псевдоструктуре соответствует уравнение состояния, определяющее зависимость температуры от термодинамических переменных).

Может ли сама энтропия быть замкнутой формой? Для этого, очевидно, должно реализоваться еще одно условие.

Возьмем простейшую открытую термодинамическую систему - газ. Для такой системы эволюционное соотношение (14) может быть записано в виде

$$ds = (de + pdV) \,/\, T \qquad (19)$$

где s и e - есть соответственно энтропия и внутренняя энергия единицы объема газа. Это соотношение является тождественным при условии $T = p / R\rho$, $\rho = 1 / V$, то есть тогда, когда T выражается через характеристики системы и становится интегрирующим множителем. Это реализуется в термодинамическом процессе. В этом случае получается замкнутая форма первой степени - дифференциал от энтропии ds. При этом состояние газа оказывается локально-равновесным с функцией состояния (потенциалом) s. Если при этом еще реализуется интегрирующее направление, при котором формируется связь $f(p,\rho)=0$, то дифференциал от энтропии становится равным нулю и это означает, что энтропия оказывается замкнутой формой - инвариантом - сохраняющейся величиной. Примером такого интегрирующего направления является скорость звука: $a^2=\partial p/\partial\rho=\gamma p/\rho$. В этом случае выполняется равенство $ds=d(p/\rho^{\lambda})=0$, из которого следует, что энтропия $s=p/\rho^{\lambda}=const$ сама становится замкнутой формой (нулевой степени). Следует подчеркнуть, что это не означает, что состояние газа является тождественно изоэнтропическим. Энтропия постоянна только на интегрирующем направлении (например, на адиабатах, на фронте звуковой волны), в то время как в направлении нормальном к интегрирующему направлению, терпит разрыв нормальная производная от энтропии.

Следует подчеркнуть, что температура (как интегрирующий множитель) не является непрерывной термодинамической переменной. Она является переменной, которая реализуется в термодинамическом процессе. Это является условием, при котором состояние термодинамической системы становится локально-равновесным и описывается при помощи функции состояния - энтропии. Если такой интегрирующий множитель не реализуется, то локально-равновесное состояние не формируется. Следует подчеркнуть, что общее состояние термодинамической системы в реальных процессах является неравновесным. И только при условии, когда реализуется интегрирующий множитель - температура, термодинамическая система переходит в локально-устойчивое состояние. При этом неизмеримая величина, определяемая коммутатором, переходит в некоторое измеримое (наблюдаемое) образование. Примерами таких переходов являются фазовые переходы. Флуктуации являются примером возникновения наблюдаемых образований. Следует подчеркнуть и то, что скорость звука (так же как температура) не является постоянно действующей величиной, а реализуется в термодинамическом процессе (при наличии степеней свободы у термодинамической системы). Можно увидеть аналогию между температурой и скоростью звука: температура - это интегрирующий множитель, скорость звука - это интегрирующее направление.

Для реальных термодинамических процессов $d(dE + dw) \neq 0$, так как коммутатор формы $dE + dw = \Omega$ не равен нулю. Как уже отмечалось, непрерывным образом коммутатор может увеличиваться. То есть, если у термодинамической системы нет степеней свободы, которые позволяли бы реализоваться интегрирующему множителю, то величина, которая описывается коммутатором и которая действует как внутренняя сила, может нарастать. Пригожин[21] определил это как "производство избыточной энтропии". Именно такое увеличение внутренней силы и воспринимается как возрастание энтропии в необратимых процессах, хотя в этом случае нет функции состояния, то есть нет энтропии как функции состояния. В этом случае имеется некоторый функционал состояния δS, который следует (следит) за изменяющейся неинтегрируемой формой $dE + dw$ (или формой $dE + pdV$), коммутатор которой возрастает. Именно возрастание коммутатора неинтегрируемой формы и следящего за ним аналога коммутатора для функционала δS и названо Пригожиным "производством избыточной энтропии". Если же у термодинамической системы имеются степени свободы, которые позволяют реализоваться интегрирующему множителю, то величина, которая описывается коммутатором - избыточная энтропия, переходит в измеримую величину.

Замкнутая статическая система, предоставленная самой себе, может стремится к состоянию полного термодинамического равновесия. Этому соответствует стремление функционала состояния к своему асимптотическому максимуму. Для динамической системы стремление системы к состоянию полного термодинамического равновесия может нарушаться динамическими процессами и переходами к состоянию локального равновесия (замкнутые формы в этом случае могут сформироваться на интегрируемых направлениях).

Приложение 4

Газодинамическая система.

Получим эволюционное соотношение для газодинамической системы. Такой системой является движущийся газ. Уравнениями, описывающими балансные законы сохранения, являются уравнения Эйлера для идеального газа или уравнения Навье-Стокса для вязкого теплопроводного газа[20].

Рассмотрим простейший случай газодинамической системы - течение идеального (невязкого нетеплопроводного) газа.

Введем две системы координат: инерциальную систему координат - не связанную с материальным системой, и сопутствующую - связанную с многообразием, образованным траекториями элементов материальной системы. (Примером инерциальной и сопутствующей систем координат является эйлерова и лагранжева системы координат). В инерциальной системе координат уравнениями, описывающими балансные законы сохранения (энергии, количества движения, массы) в этом случае являются уравнения Эйлера [20].

Уравнение балансного закона сохранения энергии можно записать в виде

$$\frac{Dh}{Dt}-\frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt}=0 \qquad (1)$$

где p,ρ и h - плотность, давление и энтальпия газа. Здесь D/Dt - полная производная по времени (если пространственные координаты обозначить через x_i и соответствующие им скорости через u_i, то $D/Dt=\partial/\partial t+u_i\partial/\partial x_i$).

Если учесть, что $de=dh-d(Vp)$ и $V=1/\rho$, то уравнение (1) можно записать в виде (здесь e - энергия единицы объема газа):

$$\frac{De}{Dt}+p\frac{D(1/\rho)}{Dt}=0 \qquad (2)$$

В уравнение (1) или (2) входят термодинамические параметры газа. Здесь следует отметить, что элементом газодинамической системы как материальной системы является частица газа, которая в свою очередь является термодинамической системой. {Сравнивая с термодинамической системой можно отметить, что если изменение энергии термодинамической системы равняется de, то изменение энергии частицы газа как элемента газодинамической системы выражается не только через изменение внутренней энергии, но и через изменение термодинамической работы}. Если частицы газа (но не сама газодинамическая система) находятся в состоянии локального термодинамического равновесия (например, реализуется интегрирующий множитель - см. приложение 3), то

$$de + pdV = Tds \tag{6}$$

(это соответствует тому, что элементы газодинамической системы - частицы газа, находятся в состоянии локального равновесия, но сама газодинамическая система может находится в неравновесном состоянии).

Рассмотрим случай, когда соотношение (6) выполняется. Тогда уравнение (5) принимает вид

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \tag{7}$$

(Следует подчеркнуть, что поскольку производная здесь берется по пространственно-временным координатам, то энтропия, входящая в газодинамическое уравнение, выступает как функция пространственно-временных координат, а не только как функция термодинамических переменных, и именно это позволяет ей характеризовать газодинамическую систему, а не просто газ как термодинамическая система).

Полная производная по времени является производной вдоль траектории. Поэтому в сопутствующей системе координат уравнение (7) переходит в уравнение

$$\frac{\partial s}{\partial \xi^1} = 0 \tag{8}$$

где ξ^1 - координата вдоль траектории (введен индекс 1 для удобства изложения).

В общем случае, когда газ может не быть идеальным, уравнение балансного закона сохранения может быть записано в виде

$$\frac{\partial s}{\partial \xi^1} = A_1 \tag{9}$$

где A_1 - выражение, зависящее от энергетических воздействий и от внутренних характеристик газодинамической системы (для идеального газа A_1=0 и уравнение (9) переходит в уравнение (8)). В случае вязкого теплопроводного газа, описываемого системой уравнений Навье-Стокса, выражение A_1 можно записать в виде [20]

$$A_1 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(-\frac{q_i}{T}\Big) - \frac{q_i}{\rho T}\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\tau_{ki}}{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \qquad (10)$$

(выражение A_1 записано в координатах инерциальной системы). Здесь q_i - тепловой поток, $\tau_{k\,i}$ - тензор вязких напряжений. В случае реагирующего газа в это соотношение добавляются члены, связанные с химической неравновесностью.

Аналогично, уравнение, описывающее балансный закон сохранения количества движения, в сопутствующей системе координат приводится к виду

$$\frac{\partial s}{\partial \xi^{\nu}} = A_{\nu}, \qquad \nu = 2,\ldots \qquad (12)$$

В случае идеальной жидкости уравнение сохранения количества движения в инерциальной системе координат можно записать в виде[27]

$$qrad\ s = (\,qrad\ h_0 - \mathbf{U} \times rot\ \mathbf{U} + \mathbf{U} \times \mathbf{F} + \partial \mathbf{U} / \partial t) / T \quad (13)$$

где $qrad$ определен в плоскости, нормальной к траектории, $\mathbf{U}$ - скорость частицы газа, $h_0 = (\mathbf{U} \bullet \mathbf{U}) / 2 + h$, $\mathbf{F}$ - массовые силы (уравнение (13) известно как соотношение Крокко [27]). В сопутствующей системе координат уравнение (13) можно записать в виде (12), где левая часть уравнения (13) переходит в $\partial s / \partial \xi^{\nu}$, а A_{ν} получается из правой части уравнения (13). То есть в координатах инерциальной системы координат

$$A_{\nu} = (\,qrad\ h_0 - \mathbf{U} \times rot\ \mathbf{U} + \mathbf{U} \times \mathbf{F} + \partial \mathbf{U} / \partial t) / T \quad (14)$$

Уравнения (9) и (12) можно свернуть в соотношение

$$ds = A_\mu d\xi^\mu \quad (\mu = 1, \nu) \tag{15}$$

которое может быть нетождественным. Его следует записать в виде

$$ds \cong \omega \tag{16}$$

где $\omega = A_\mu d\xi^\mu \quad (\mu = 1, \nu)$ - есть дифференциальная форма первой степени. {Если форма ω окажется замкнутой формой и будет дифференциалом, то из соотношения (16) (в этом случае оно будет тождественным) может быть получен дифференциал энтропии S, из которого можно будет определить энтропию как функция пространственно-временных координат. То есть энтропия будет не только термодинамической функцией состояния, но будет уже и функцией состояния газодинамической системы. Но для реальных процессов соотношение (16), как будет показано ниже, не является тождественным и энтропия S как функция состояния газодинамической системы может быть не определена (хотя она может являться термодинамической функцией состояния)}.

Соотношение (16) и является эволюционным соотношением (здесь $\psi = S$) для газодинамической системы (для случая, когда реализуется локальное термодинамическое равновесие и S удовлетворяет еще соотношению (6)).

Можно ли из эволюционного соотношения получить какую-либо информацию о функционале S и о состоянии газодинамической системы?

Рассмотрим простейший случай, когда газ идеальный. Поскольку в этом случае коэффициент A_1 равен нулю, то компоненты коммутатора $K_{1\nu}$, образованного производными от коэффициентов формы ω, равны

$$K_{1\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial \xi_1} - \frac{\partial A_1}{\partial \xi_\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial \xi_1} \tag{19}$$

(Здесь еще не учитываются члены, связанные с деформацией многообразия, образованного траекториями элементов системы). Компоненты $K_{1\nu}$ могут быть равны нулю в том случае, если все члены коэффициентов A_ν

являются (в инерциальной системе координат) градиентами. Из выражения (14) видно, что первый член является $qrad$ (напомним, что $qrad$ определен в плоскости, нормальной к траектории), второй - может быть $qrad$ только в случае односвязной области (течения), третий - может быть $qrad$, если массовые силы потенциальны. Четвертый член, связанный с нестационарностью течения, $qrad$ быть не может. Получается, что коммутатор формы ω может равняться нулю, если область течения односвязная, течение стационарное и массовые силы потенциальны. {Как известно, именно эти условия есть условия Лагранжа для безвихревого течения[28]}.Только при выполнении этих условий форма ω может быть замкнутой формой и может быть дифференциалом. В этом случае эволюционное соотношение (16) будет тождественным и будет определять энтропию как функцию состояния газодинамической системы, что и будет указывать на локально-равновесное состояние газодинамической системы и соответствовать потенциальному течению.

Если перечисленные условия, которые можно назвать условиями интегрируемости формы ω, не выполняются, то компоненты $K_{1\nu}$ коммутатора формы ω будут отличными от нуля. Форма ω не будет дифференциалом. Значит нельзя будет (без дополнительных условий) определить энтропию S как функцию состояния газодинамической системы. А это означает, что газодинамическая система находится в неравновесном состоянии. Очевидно, что внутреннюю силу, вызывающую неравновесность, описывает коммутатор формы ω.

Внутренняя сила вызывает деформацию сопутствующего многообразия (образованного траекториями) - многообразия, на котором определена форма. А это означает, что в коммутаторе появится дополнительный член - коммутатор метрической формы (см. пункт **г** параграфа 2), который не равен нулю из-за деформации многообразия. Появление дополнительного члена может привести к увеличение коммутатора, что указывает на увеличение внутренней силы, и на развитие газодинамической неустойчивости. Это является причиной возникновения газодинамических структур (волн, скачков, вихрей, турбулентных пульсаций). Но момент возникновения газодинамических структур связан с реализацией (в процессе деформации) каких-либо степеней свободы. Так как любой физической структуре должна соответствовать замкнутая форма (с коммутатором равным нулю), то для перехода от ненулевого коммутатора к нулевому должно произойти вырожденное преобразование (например, обращение в нуль таких функционалов, как детерминант, якобиан преобразования, скобки Пуассона и т.д.). Реализация таких вырожденных преобразований (что возможно, если у системы есть какие-либо степени свободы) и соответствует возникновению (спонтанному) газодинамических структур - появлению некоторых образований, интенсивность которых определяется коммутатором неинтегрируемой формы. Неизмеримая величина, накопленная коммутатором неинтегрируемой формы при этом переходит в некоторую измеримую величину возникшего образования. Следует отметить, что такие образования формируются локально. Их выделение из локальной области приводит локальную область в равновесное состояние. Выделившееся образование распространяется по газодинамической системе, воздействуя на соседнюю область (как потенциальные силы), формируясь в ней и выделясь из нее. (О скорости перемещения образования см. пункты **е-з** параграфа 2).

Очевидно, что причиной неустойчивости является то, что вносит вклад в коммутатор формы ω. Анализируя коэффициенты формы ω, то есть выражения A_μ для производных от энтропии (соотношения (10, 13, 14)), можно увидеть, что в коммутатор могут вносить вклад члены, связанные с неодносвязностью области течения, непотенциальностью внешних сил, нестационарностью течения (соответственно, второй, третий и четвертый члены соотношения (14)) и члены, связанные с процессами переноса (соотношение (10)). Все эти эффекты, связанные с внешними (для каждой локальной области газодинамической системы) воздействиями, приводят к появлению внутренних сил, то есть к неравновесности и развитию различных типов неустойчивости. (В общем случае на газодинамическую неустойчивость будет влиять термодинамическая, химическая, колебательная, вращательная, поступательная неравновесность). В то же время для каждого типа неустойчивости можно найти член коммутатора неинтегрируемой формы, входящей в эволюционные соотношения, который ответственен за этот тип неустойчивости. То есть имеется однозначная связь между типом неустойчивости и членами, которые вносят вклад в коммутатор неинтегрируемой формы эволюционного соотношения. (Здесь следует подчеркнуть, что, если, кроме балансных законов сохранения энергии и количества движения, учитывать балансные законы сохранения момента количества движения и массы, то получатся эволюционные соотношения с формами других степеней).

Величина, накопленная коммутатором при реализации условий сопряжения (условий вырожденных преобразований - обращения в нуль детерминантов, якобианов преобразований и т.д.), переходит в измеримую величину, что соответствует возникновению газодинамических структур. Такие условия выполняются, например, на характеристиках (детерминант при выводящих производных обращается в нуль), в особых точках (якобиан равняется нулю), огибающих характеристик и т.д. уравнений Эйлера или в особых точках уравнений Навье-Стокса.

Рассмотрим, какие типы неустойчивости возникают при заданных воздействиях и какие газодинамические структуры при этом могут возникнуть.

1. Удар, разрыв диафрагмы и т.д..

Неустойчивость возникает из-за нестационарности. Вклад в коммутатор вносит последний член соотношения (14). В случае идеального газа, течение которого описывается уравнениями гиперболического типа, переход к локально-равновесному состоянию возможен на характеристиках и их огибающих. Соответствующими структурами являются слабые скачки уплотнения и ударные волны.

2. Обтекание тел идеальным (невязким, нетеплопроводным) газом. Действие непотенциальных массовых сил.

Неустойчивость развивается из-за неодносвязности области течения и непотенциальности массовых сил. Вклад в коммутатор происходит за счет второго и третьего членов соотношения (14). Так как газ идеальный и $\partial s / \partial \xi^1 = A_1 = 0$, то есть нет вклада в каждую частицу, то развивается неустойчивость конвективного типа. При $\mathbf{U} > a$, где $\mathbf{U}$ - скорость частицы газа, a - скорость звука, система уравнений балансных законов сохранения имеет гиперболический тип и поэтому переход к локально-равновесному состоянию возможен также на характеристиках и огибающих характеристик, а структурами являются слабые скачки уплотнения и ударные волны. При $\mathrm{U} < a$, когда уравнения эллиптического типа, такой переход возможен в особых точках. Возникающие структуры из-за конвективности носят вихревой характер. При длительных воздействиях могут формироваться крупномасштабные структуры.

3. Пограничный слой.

Неустойчивость возникает за счет неодносвязности области течения и за счет процессов переноса (влияние вязкости и теплопроводности). Вклад в коммутатор вносят второй член соотношения (14) и второй и третий члены соотношения (10). Переход к локально-равновесному состоянию возможен в особых точках. Так как в этом случае $\partial s / \partial \xi^1 = A_1 \neq 0$, то есть воздействие идет на каждую частицу газа отдельно, то развитие неустойчивости и переходы к локально-равновесному состоянию возможен только в отдельной частице. Поэтому возникающие структуры носят характер пульсаций. Это есть турбулентные пульсации.

Здесь следует отметить следующее. Считается, что неустойчивость - это возникновение каких-либо структур в газодинамическом течении. С этой точки зрения ламинарный пограничный слой считается устойчивым, а турбулентный неустойчивым. Но ламинарный пограничный слой нельзя считать устойчивым, так как в нем из-за неодносвязности области течения и процессов переноса уже развивается неустойчивость, хотя и не возникают какие-либо структуры. В турбулентном же пограничном слое возникновение пульсаций представляет собой переход (локально, в отдельной локальной области) к локально-равновесному состоянию, а сами пульсации являются локальными образованиями. Другое дело, что из-за общей неравновесности локально-равновесное состояние нарушается и пульсации разрушаются.

Следует еще отметить, что выделение некоторого образования из локальной области системы или из частицы газа сопровождается возникновением поверхностей разрыва (контактные разрывы). Эти разрывы находятся в самой материальной системе, а не распространяются по материальной системе, как скачки уплотнения, ударные волны и т.д..

<u>Приложение 5</u>

О взаимодействиях.

Тип физических структур (и, соответственно, физических полей), генерируемых эволюционным соотношением, как было показано в параграфе 2, зависит от степени внешних форм p, k (здесь p - степень неинтегрируемой формы эволюционного соотношения, связанная с числом взаимодействующих балансных законов сохранения, а k - степень замкнутой формы, генерируемой эволюционным соотношением) и от размерности пространства n. Введя классификацию по p, k, n можно понять внутреннюю связь различных физических полей. А так как физические поля являются переносчиками взаимодействий, то такая классификация позволит увидеть и связь между взаимодействиями.

<u>ТАБЛИЦА 2</u>

взаимо-действия	\ n k \ p	i + 0 **0**	i + 1 **1**	i + 2 **2**	i + 3 **3**	частицы (рождающ)
гравита-ционное	**3**				**гравитон** ⇑{электрон+ протон +нейт-рон + фотон} {нейтрино, квант) ?	гравитон
электро-магнитн.	**2**			**фотон 2** ⇑ {электрон + протон+нейтри {квант}?	**фотон 3**	фотоны
слабое	**1**		**нейтрино1** ⇑ {электрон +квант}	**нейтрино2**	**нейтрино3**	нейтрино

сильное	**0**	**квант 0** ⇑ {кварки?}	**квант1**	**квант2**	**квант 3**	мезоны? глюоны?
=====	=======	=======	========	===========	==========	========
частицы материальн. (нуклоны?)	точные формы	**электрон**	**протон**	**нейтрон**	**дейтрон ?**	

В таблице приведены названия рождающихся частиц. Цифры, стоящие около названий частиц, соответствуют размерности пространства. В скобках {} указаны источники взаимодействий. В последнем столбце - тип рождающихся частиц (им соответствуют степень замкнутой формы k). В нижней строке - массовые частицы, сформировавшиеся в результате взаимодействий (им соответствуют точные формы нулевой степени, получившиеся при последовательном интегрировании формы степени p).

Из таблицы видно соответствие между степенью k реализовавшихся замкнутых форм и типом взаимодействий. Так сильному взаимодействию соответствует $k=0$, слабому - $k=1$, электромагнитному - $k=2$ и гравитационному - $k=3$. При этом получается, что тип взаимодействия и тип рождающихся частиц определяются степенью (k) реализующихся замкнутых форм, а свойства частиц определяются степенью (p) эволюционного соотношения, то есть числом взаимодействующих балансных законов сохранения и размерностью пространства. Последнее связано с тем, что замкнутые формы одинаковой степени k, но полученные из эволюционных соотношений, действующих в пространствах разной размерности n (при разных значениях p), различаются между собой, поскольку они определены на псевдоструктурах разной размерности (размерность псевдоструктуры ($n+1-k$) зависит от размерности исходного пространства n). Поэтому реализовавшиеся физические структуры с одинаковыми степенями k замкнутых форм различаются по своим свойствам.

<u>Приложение 6</u>

Формирование метрических пространств.

Физические структуры, образующие физические поля (им соответствуют неточные замкнутые внешние и метрические формы), связаны с пространственными псевдометрическими объектами. Элементы материальной системы (им соответствуют точные внешние и метрические формы) связаны с пространственными метрическими объектами. Механизм возникновения физических структур (см. параграф 2) раскрывает и механизм формирования псевдометрических и метрических пространств.

Отметим некоторые свойства многообразий.

Допустим, что на многообразии можно задать систему координат с базисом $\mathbf{e}_\mu$ и определить метрические формы многообразия[16]: $(\mathbf{e}_\mu \mathbf{e}_\nu)$, $(\mathbf{e}_\mu dx^\mu)$, $(d\mathbf{e}_\mu)$. Метрические формы и их коммутаторы определяют метрические и дифференциальные характеристики многообразия. Если метрические формы замкнуты (коммутаторы равны нулю), то определена метрика $g_{\mu\nu} = (\mathbf{e}_\mu \mathbf{e}_\nu)$ и результаты перемещения по многообразию точки - $d\mathbf{M} = (\mathbf{e}_\mu dx^\mu)$ и единичного репера - $d\mathbf{A} = (d\mathbf{e}_\mu)$ не зависят от пути перемещения (интегрирования). Замкнутые метрические формы определяют структуру многообразия, а коммутаторы метрических форм определяют такие характеристики многообразия, как изгиб, кручение, кривизна (если коммутаторы отличны от нуля, то результаты перемещения по многообразию точки и репера зависят от пути перемещения). Примером многообразия с замкнутыми метрическими формами является дифференцируемое многообразие, метрические и дифференциальные характеристики которого оказываются согласованными[11].

Дифференциальными характеристиками многообразия могут быть связности[16] $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$, $\left(\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu}\right)$, $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$, которые являются компонентами коммутаторов метрических форм. Как известно[16], у эвклидова многообразия эти коммутаторы равны нулю. У риманова многообразия не равен нулю коммутатор метрической формы второй степени: $R^\mu_{\nu\rho\sigma} \neq 0$.

Если внешние дифференциальные формы определены на многообразиях, метрические формы которых незамкнуты, то в коммутаторы внешних дифференциальных форм, определенных на таких многообразиях, входят, как уже отмечалось, коммутаторы метрических форм. В частности, компоненты коммутатора внешней формы первой степени $\theta = a_\alpha dx^\alpha$ можно записать через связности в виде:

$$K_{\alpha\beta}=\left(\frac{\partial a_\beta}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial a_\alpha}{\partial x^\beta}\right)+\left(\Gamma^\sigma_{\beta\alpha}-\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\right)a_\sigma \qquad (1)$$

Видно, что коммутатор внешней формы состоит из двух членов, один из которых (первая скобка) зависит от коэффициентов внешней формы, а второй - от дифференциальных характеристик многообразия. Это характерно и для коммутаторов внешних форм других степеней. Благодаря такой особенности проявляются топологические свойства коммутаторов внешних форм: они могут осуществлять взаимосвязь между внешней формой и базисом - метрической формой многообразия, и описывать изменение дифференциальных характеристик многообразия в зависимости от внешней формы (это существенно при описании балансных законов сохранения, когда внешние формы определены на сопутствующих многообразиях, характеристики которых зависят от самих внешних форм). Из этой особенности вытекает еще одно свойство коммутатора. Коммутатор состоит из членов, которые имеют разную природу - один зависит от внешней формы, а другой от базиса. Такие члены не могут быть тождественно равными и поэтому не могут обратить коммутатор в нуль. Внешние формы, определенные на многообразиях, метрические формы которых незамкнуты, оказываются тоже незамкнутыми (такие формы можно назвать неинтегрируемыми, в отличие от незамкнутых форм, определенных на дифференцируемых многообразиях). Указанные свойства коммутаторов внешних форм и позволяют раскрыть механизм формирования метрических пространств.

При выводе эволюционного соотношения использовалось два пространственных объекта: сопутствующее многообразие (связанное с материальной системой), которое для реальных процессов не имеет метрической структуры, и инерциальное пространство (не связанное с материальной системой), которое является метрическим. Генератором формирующегося метрического пространства является материальная система, а базой - сопутствующее многообразие. При этом сформировавшееся метрическое пространство становится инерциальным пространством на единицу большей размерности, чем исходное.

Допустим, что исходное инерциальное пространство имеет размерность n=**3**. Для материальной системы в таком пространстве действуют балансные законы сохранения, которые сворачиваются в сопутствующей системе координат в эволюционное соотношение, где p=n=**3**:

$$d\psi \cong \omega^3, \quad d\omega^3 \neq 0 \qquad (2)$$

Форма ω^3 определена на сопутствующем многообразии, и поэтому является неинтегрируемой - ее коммутатор не равен нулю. (Здесь степень формы ψ равна 2).

Реализация псевдоструктуры (элемента псевдометрического пространства) и возникновение физической структуры, которым должны соответствовать замкнутые метрические и внешние формы, есть переход от неинтегрируемой формы ω^3 к замкнутой форме $\omega`^3$ (что связано с вырожденным преобразованием). То есть должны выполниться соотношения:

$$d_\pi \omega`^3 = 0 \qquad (3)$$

$$d_\pi {}^{*}\omega`^3 = 0 \qquad (4)$$

(условия реализации таких соотношений описаны в параграфе 2, п. д). Степень замкнутой формы а данном случае равна $k = p$=3, а размерность псевдоструктуры - n+1-k =p+1-k =1.

Из эволюционного соотношения (2) на псевдоструктуре получится соотношение

$$d_\pi \psi = \omega`^3 \qquad (5)$$

которое является тождественным, так как замкнутая форма $\omega`^3$ может быть выражена через дифференциал. Из этого соотношения определяется форма $d_\pi\psi$, характеризующая состояние системы, которую можно назвать структурной формой. (В данном случае это форма третьей степени). Она соответствует закону сохранения, так как дифференциал от этой формы (внутренний, на псевдоструктуре) равен нулю.

Реализация псевдоструктуры (связанная с возникновением физической структуры и выполнением закона сохранения) является одним из проявлений механизма формирования метрических пространств. Здесь следует подчеркнуть, что псевдоструктура реализуется относительно инерциальной системы координат. Вырожденное преобразование соответствует переходу от системы координат, связанной с сопутствующим многообразием, к инерциальной системе координат.

Для наглядности поставим в соответствие внешним формам тензорные выражения. Внешней форме степени p на дифференцируемом многообразии, можно поставить в соответствие тензор с p нижними (ковариантными) индексами. Как известно, дифференциал формы степени p на дифференцируемом многообразии является формой степени p**+1.** Ему можно поставить в соответствие тензор с (p**+1**) нижними индексами. По аналогии с этим поставим в соответствие дифференциалу или коммутатору неинтегрируемой формы тензорное выражение $K_{\alpha\dots}$. При таком обозначении коммутатор формы ω^3 можно записать в виде $K_{\alpha\beta\gamma\chi}$, где три индекса соответствуют степени формы, а четвертый появляется при дифференцировании формы (здесь и в дальнейшем используются греческие индексы для сопутствующей системы координат и латинские - для инерциальной). В коммутатор неинтегрируемой формы входит коммутатор базиса, который можно обозначить соответственно через $R_{\alpha\beta\gamma\chi}$. Замкнутым формам $d_\pi\psi$ и $\omega`^3$ (которые формируются относительно инерциальной системы координат) можно поставить в соответствие 3-ковариантные тензоры S_{jkl} и T_{jkl} (дивергенция которых равна нулю, так как они соответствуют замкнутым формам), а псевдоструктуре - одно-контравариантный псевдотензор T^i (он соответствует замкнутой метрической форме -

псевдоструктуре), дуальный тензору T_{jkl} [19]: $T^i = {}^*T_{jkl} = \frac{1}{6}\varepsilon^{ijkl}T_{jkl}$ (здесь $\varepsilon^{ijkl} = e_i e_j e_k e_l \varepsilon_{ijkl}$, где ε_{ijkl} - единичный псевдотензор - совокупность величин, антисимметричных относительно своих значков). Соответственно для тензора S_{jkl} дуальный обозначим через $S^i = {}^*S_{jkl}$. Введем тензорные выражения:

$$\mathbf{S}^i_{jkl} = \begin{cases} S_{jkl} \\ S^i \end{cases}, \quad \mathbf{T}^i_{jkl} = \begin{cases} T_{jkl} \\ T^i \end{cases}$$

{Эти тензорные выражения не являются тензорами с ковариантными и контравариантными индексами. Во-первых, потому, что они объединяют тензоры и псевдотензоры, а во-вторых, в этих выражениях нельзя поднимать и опускать индексы, так как метрика здесь еще не определена}. Тензорное выражение $\mathbf{S}^i_{jkl}$ - это представление физической структуры (соответствует структурной форме на псевдоструктуре), а тензорное выражение $\mathbf{T}^i_{jkl}$ - представление форм $\omega`^3$ и ${}^*\omega`^3$ (соответствует внешним воздействиям, переработанным материальной системой).

Соотношение (5) с учетом соотношений (3) и (4) в тензорных выражениях можно записать в виде

$$\mathbf{S}^i_{jkl} = \mathbf{T}^i_{jkl} \tag{6}$$

Соотношение (6) показывает, что физическая структура (в том числе и пространственная псевдоструктура) получается за счет переработанных системой (результат вырожденного преобразования) внешних воздействий.

Каков дальнейший механизм формирования метрического пространства?

Величина, описываемая коммутатором неинтегрируемой формы ω^3 (входящей в эволюционное соотношение) и действующая как внутренняя сила, при возникновении физической структуры, переходит в потенциальную силу, действующую в направлении, трансверсальном к псевдоструктуре. (Если бы дифференциал формы

ω^3 равнялся нулю, то есть равнялись нулю коммутаторы $R_{\alpha\beta\gamma\chi}$ и $K_{\alpha\beta\gamma\chi}$, то потенциальная сила равнялась бы нулю). Эта потенциальная сила становится новым источником неравновесности (даже без дополнительных внешних воздействий) и может привести к дальнейшему формированию псевдоструктур.

Так как соотношение (5) является тождественным, то оно может быть проинтегрировано. Поскольку форма $\omega`^3$ замкнута, то она является внутренним (на псевдоструктуре) дифференциалом от формы степени на единицу меньше

$$\omega`^3 = d_\pi \omega^2 \qquad (7)$$

Из соотношений (5) и (7) получается соотношение (для удобства изложения ниже будет указываться степень формы ψ)

$$d_\pi \psi^2 = d_\pi \omega^2$$

которое можно проинтегрировать и получить (с точностью до форм низшей степени)

$$\psi^2 = \omega^2 \qquad (8)$$

Это является интегрированием нетождественного эволюционного соотношения (2) по одной, сформировавшейся, размерности.

Из соотношения (7) видно, что дифференциал формы ω^2 не равен нулю. То есть полученная форма ω^2 (степени p-1=2) на оставшихся (после интегрирования) направлениях многообразия оказывается неинтегрируемой (ее коммутатор не равен нулю). Коммутатору формы ω^2 можно поставить тензорное выражение $K^{\alpha}_{\beta\gamma\chi}$ (три нижних индекса - это степень внешней формы плюс 1, а один верхний - это одна сформировавшаяся псевдометрическая размерность). Базисный коммутатор в этом случае можно записать в виде $R^{\alpha}_{\beta\gamma\chi}$. (Из такого тензора при выполнении тождества Бианки[31] получается тензор Римана-Кристоффеля - G^{i}_{jkl}, соответствующий риманову многообразию. Но это происходит после полного формирования псевдориманова и риманова многообразия).

Здесь появляется особенность. С одной стороны полученная форма ω^2 оказалась неинтегрируемой и, следовательно, не может быть выражена через дифференциал. С другой стороны форма ψ^2, стоящая в левой части соотношения (8), чтобы быть структурной формой, должна быть дифференциалом, то есть замкнутой формой. Должно быть

$$\psi^2 = d\psi^1 \tag{9}$$

Сравнивая соотношения (8) и (9), получаем соотношение

$$d\psi^1 \cong \omega^2 \tag{10}$$

которое не может быть тождественным, так как форма ω^2 не выражается через дифференциал.

Нетождественное соотношение (10) является соотношением такого же типа как исходное соотношение (2), но имеет формы на единицу меньшей степени. Для этого соотношения можно повторить тот же анализ, что и для соотношения (2) и получить псевдоструктуру на единицу большей размерности. Интегрируя последовательно нетождественные соотношения можно в результате получить псевдометрическое пространство. Ему соответствуют замкнутые внешние формы степени p, p-1, ..., 0, которые не являются точными. Переходу к метрическому пространству будет соответствовать переход к точной форме нулевой степени.

Схематично, используя тензорные выражения, такие переходы можно записать в следующем виде (здесь m - размерность псевдоструктуры):

$$d\psi \cong \omega^3,\quad d\omega^3 \neq 0: (K_{\alpha\beta\gamma\chi} \neq 0,\ R_{\alpha\beta\gamma\chi} \neq 0) \tag{11}$$

$\Downarrow$(вырожденное преобразование)

$$m = 1,\qquad \mathbf{S}^i_{jkl}:\ \mathbf{S}^i_{jkl} = \mathbf{T}^i_{jkl}$$

(12)

$$+\ d\psi \cong \omega^2,\ d\omega^2 \neq 0: (K^{\alpha}_{\beta\gamma\chi} \neq 0, R^{\alpha}_{\beta\gamma\chi} \neq 0) \tag{13}$$

$\Downarrow$(вырожденное преобразование)

$m=2$, $\quad \mathbf{S}^{ij}_{kl}$: $\quad \mathbf{S}^{ij}_{kl} = \mathbf{T}^{ij}_{kl}$

(14)

$$+ \quad d\psi \cong \omega^1, \qquad d\omega^1 \neq 0: \quad (K^{\alpha\beta}_{\gamma\chi} \neq 0, \ R^{\alpha\beta}_{\gamma\chi} \neq 0)$$

(15)

$\Downarrow$(вырожденное преобразование)

$m=3$, $\quad \mathbf{S}^{ijk}_{l}$: $\quad \mathbf{S}^{ijk}_{l} = \mathbf{T}^{ijk}_{l}$

(16)

$$+ \quad d\psi \cong \omega^0, \quad d\omega^0 \neq 0: \quad (K^{\alpha\beta\gamma}_{\chi} \neq 0, \ R^{\alpha\beta\gamma}_{\chi} \neq 0)$$

(17)

$\Downarrow$(вырожденное преобразование)

$m=4$, $\quad \mathbf{S}^{ijkl}$: $\quad \mathbf{S}^{ijkl} = \mathbf{T}^{ijkl}$

(18)

$$+ d\psi \cong \int \omega^0, \qquad \omega^0 \neq 0: \ (K^{\alpha\beta\gamma\chi} \neq 0, \ R^{\alpha\beta\gamma\chi} \neq 0)$$

(19)

$\Downarrow$(вырожденное преобразование)

$$\psi = 0$$

Реализация псевдоструктур размерностей - (1, ... , 4) и замкнутых неточных форм степени (3, ... , 0) (возникновение физических структур $\mathbf{S}^{i}_{jkl}$, ... , $\mathbf{S}^{ijkl}$) соответствует формированию псевдометрического многообразия. Переходу к метрическому пространству соответствует переход к точной форме.

Что можно сказать о псевдоримановом многообразии и римановом пространстве?

Как известно, при выводе уравнения Эйнштейна[29] предполагалось выполнение условий: выполнение тождества Бианки, симметрия коэффициентов связности, коэффициенты связности есть символы Кристоффеля и наличие преобразования, при котором коэффициент связности обращается в нуль. Эти условия есть условия реализации вырожденных преобразований для нетождественных эволюционных соотношений (13), (15), (17), (19). Из тензорного выражения $R^{\alpha}_{\beta\gamma\chi}$ при выполнении тождества Бианки[31] получается тензор Римана-Кристоффеля - G^{i}_{jkl}. Тензорному выражению $R^{\alpha\beta}_{\gamma\chi}$ соответствует коммутатор метрической формы первой степени - $\left(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}\right)$, из которого при условий симметрии коэффициентов связности - $\left(\Gamma^{j}_{lk} - \Gamma^{j}_{kl}\right) = 0$ получается тензор Риччи. Тензорному выражению $R^{\alpha\beta\gamma}_{\chi}$ соответствует связность $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$, из которой при условии $\Gamma^{j}_{kl} = \left\{ {j \atop kl} \right\}$ (коэффициенты связности равны символам Кристоффеля) получается тензорное выражение $\mathbf{S}^{ijk}_{l}$, соответствующее тензору Эйнштейна $S^{k}_{l} = G^{k}_{l} - \frac{1}{2}\delta^{k}_{l}G$ (тензоры G^{k}_{l} и G получаются из тензора Римана-Кристоффеля с учетом симметричности коэффициентов связности). Уравнению Эйнштейна соответствует тождество (16), связывающее тензорное выражение $\mathbf{S}^{ijk}_{l}$ с тензорным выражением $\mathbf{T}^{ijk}_{l}$, которое соответствует тензору энергии-импульса. (Следует иметь в виду, что здесь метрический тензор еще не сформирован и поэтому нельзя менять верхние и нижние индексы при помощи метрического тензора). Тензорному выражению $R^{\alpha\beta\gamma\chi}$ соответствуют коэффициенты связности, которые при наличие вырожденного преобразования обращаются в нуль, что соответствует формированию замкнутой (неточной) метрической формы нулевой степени $g_{kl} = (\mathbf{e}_{k}\mathbf{e}_{l})$. Однако на данном этапе это соответствует только формированию псевдориманова многообразия. Переходу к риманову пространству соответствует переход от замкнутой неточной формы нулевой степени к точной форме нулевой степени.

Литература

1. Петрова Л.И. К вопросу о развитии неустойчивости течения. //Фундаментальные проблемы физики ударных волн. -Черноголовка, 1987, т.1,ч.2., стр. 304-306.

2. Petrova L.I. Mechanism of structures formftion anf field selforganisation. //Труды Международного Симпозиума "Generation of Large-Scale Structures in Continuous Media" (The Nonlinear Denamics of Structures). Пермь-Москва,1990 ,стр. 201-202

3. Петрова Л.И. Механизм развития газодинамической неустойчивости и возникновения газодинамических структур. //Труды Первой Российской конференции по теплообмену, Москва, 1994, т.1, стр. 201-206

4. Петрова Л.И. Эволюционные свойства законов сохранения. //Тезисы докладов на 27 научной конференции по математической физики. Изд.: Университет дружбы народов. Москва, 1995

5. Петрова Л.И. Генерирующее соотношение эволюционной теории поля. //Тезисы докладов на 28 научной конференции по математической физики. Изд.: Университет дружбы народов. Москва, 1997, стр. 35

6. Петрова Л.И. Внешние дифференциальные формы в теории поля. // Abstracts of International Conference Dedicated to the 90th Anniversary of L.S.Pontryagin, Algebra, Geometry and Topology. Moscow, 1998, 123-125

7. Петрова Л.И. Внешние дифференциальные формы в теории поля. //Тезисы докладов на 10 Российской конференции по гравитации "Теоретические и экспериментальные проблемы общей теории относительности и гравитации". Москва, 1999, стр. 65

8. Петрова Л.И. Роль балансных и точных законов сохранения в возникновении физических структур. //Материалы 13 Международной школы-семинара "Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность. Москва, 1998, стр. 133-136

9. Ботт Р., Ту Л. Дифференциальные формы в алгебраической топологии. -М.: Наука, 1989

10. Математическая энциклопедия. -М.: СЭ., 1979

11. Новиков С.П., Фоменко А.Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. -М.: Наука, 1987

12.Уилер Дж. Гравитация, нейтрино и вселенная.-М.: ИЛ., 1955

13. Шутц Б. Геометрические методы математической физики. -М.: Мир, 1984

14. Коноплева Н.П., Попов В.Н. Калибровочные поля. -М.: Атомизд., 1980
15. Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. -М., 1962
16. Тоннела М.-А. Основы магнетизма и теории относительности. -М.: ИЛ., 1962
17. Паули В. Теория относительности. -М.: Наука, 1983
18. Физический энциклопедический словарь. -М.: СЭ., 1984
19. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. -М.: Т-ТЛ., 1955
20. Кларк Дж., Макчесни М. Динамика реальных газов. -М.: Мир, 1967
21. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуации. -М.: Мир, 1973
22. Румер Ю.Б. Исследования по 5-оптике. -М.: Т-ТЛ., 1956
23. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. -М.: Наука, 1988
24. Смирнов В.И. Курс высшей математики. -М.: Т-ТЛ., 1957, т.4
25. Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология. -М.: Наука, 1974
26. Хейвуд Р. Термодинамика равновесных процессов. -М.: Мир, 1983
27. Липман Г., Рошко А. Элементы газовой динамики. -М.: ИЛ., 1960
28. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе М.В. Теоретическая гидромеханика. -М.: Т-ТЛ., 1955, ч.1
29. Эйнштейн А. Сущность теории относительности. -М.: ИЛ., 1955
30. Дафермос К.Н. Квазилинейные гиперболические системы, вытекающие из законов сохранения. // Нелинейные волны. -М.: Мир, 1977 (//Nonliner waves. London, 1974)
31. Вейнберг С. Гравитация и космология. -М.: ИЛ., 1975

Петрова Людмила Ивановна

Внешние дифференциальные формы в теории поля.

Основы качественной эволюционной теории поля.

Петрова Людмила Ивановна - старший научный сотрудник кафедры математической физики факультета Вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Напечатано с готового оригинал-макета

Издательство ООО "МАКС Пресс".
Лицензия ИД № 00510 от 01.12.99г.
Подписано к печати 23.08.2000 г.
Усл. печ. л. 5,25. Тираж 100 экз. Заказ 343.
Тел. 939-3890, 939-3891, 928-1042. Тел./Факс 939-3891.
11989, Москва, Воробьевы горы, МГУ,