Реляционный анализ уравнения Дирака

А. В. Соловьев

Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова

В рамках реляционного подхода к описанию геометрии пространства-времени и физических взаимодействий элементарных частиц (бинарной геометрофизики) осуществлен анализ уравнения Дирака для свободного фермиона в импульсном представлении. При этом особое внимание уделено физическим допущениям, лежащим в основе уравнения Дирака. Построена биспинорная волновая функция фермиона в состоянии с положительной энергией и произвольным распределением импульсов.

1. Введение

Одной из главных задач *бинарной геометрофизики* [1] является вывод классических пространственно-временных отношений из некоторой системы более первичных понятий и закономерностей, проявляющихся в физике микромира. Близкие по духу идеи, известные как макроскопическая (статистическая) интерпретация пространства-времени, высказывались в работах А. Эйнштейна, А. Эддингтона, Л. де Бройля, Е. Циммермана, Д. ван Данцига и ряда других физиков. В частности, твисторная программа Р. Пенроуза [2] также нацелена на решение этой задачи.

Предлагаемая статья непосредственно примыкает к работе [3] и имеет своей целью обсудить не только формально-математические, но и физические предположения о релятивистской частице со спином $1/2$, которые приводят к уравнению Дирака в импульсном представлении. Соответствующие рассуждения базируются на теории *бинарной системы комплексных отношений* (БСКО) ранга $(3,3)$, развитой Ю.С. Владимировым [4]. Поэтому в следующем разделе, фактически, воспроизводящем аналогичный раздел статьи [3], излагаются основные элементы этой теории.

Раздел 3 статьи посвящен собственно уравнению Дирака для свободного массивного фермиона в импульсном пространстве. Здесь строится волновая функция такого фермиона в состоянии с положительной энергией и произвольным распределением импульсов. Уравнение Дирака возникает как $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$- и P-ковариантная связь, налагаемая на компоненты биспинора и обеспечивающая уменьшение числа независимых компонент с четырех до двух.

В заключении подводятся итоги статьи и обсуждаются возможные обобщения развитого формализма на случай взаимодействующих фермионов.

2. БСКО ранга $(3, 3)$ и группа Лоренца

Рассмотрим БСКО ранга $(3, 3)$, заданную на множествах $\mathcal{M} = \{i, k, j, \ldots\}$ и $\mathcal{N} = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ элементов произвольной природы. Ее закон имеет вид

$$\begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

где выражение для пáрного отношения, например, между элементами $i \in \mathcal{M}$ и $\alpha \in \mathcal{N}$ записывается следующим образом:

$$u_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2. \tag{2}$$

Здесь параметры i^1, i^2 и α^1, α^2 — комплексные числа, однозначно характеризующие элементы i и α соответственно. Допуская, что упорядоченные пáры параметров элементов могут принимать *любые* значения из $\mathbf{C}^2$ и, вводя в последнем стандартные операции сложения и умножения на число, наделим $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ структурой 2-мерных линейных пространств над полем $\mathbf{C}$.

Нетрудно видеть, что закон (1) допускает произвольные линейные преобразования

$$i'^r = C^r_s i^s, \quad \alpha'^r = \widetilde{C}^r_s \alpha^s, \tag{3}$$

где $C^r_s, \widetilde{C}^r_s \in \mathbf{C}$, $r, s = 1, 2$, а по повторяющемуся индексу s, как обычно, производится суммирование. Действительно, в силу элементарных свойств определителя, закон БСКО ранга $(3, 3)$ выполняется тождественно как до, так и после осуществления преобразований (3).

В бинарной геометрофизике ключевую роль играют миноры 2-го порядка определителя из (1). Они называются *фундаментальными 2×2-отношениями* и определяют псевдоевклидов характер получающейся в конечном счете геометрии.

Рассмотрим фундаментальное 2×2-отношение между элементами $(i, k) \in \mathcal{M}^2$ и $(\alpha, \beta) \in \mathcal{N}^2$, предварительно переписав его в виде:

$$\begin{bmatrix} \alpha\,\beta \\ i\ k \end{bmatrix} \equiv \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Выделим из (3) преобразования, сохраняющие (4) неизменным. В силу независимости C^r_s и $\widetilde{C}^r_s$ достаточно потребовать, чтобы при этих преобразованиях оставался инвариантным каждый из определителей

$$[i,k] \equiv \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix} = \varepsilon_{rs} i^r k^s \quad \text{и} \quad [\alpha,\beta] \equiv \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} = \varepsilon_{rs} \alpha^r \beta^s \tag{5}$$

в отдельности. Здесь посредством ε_{rs} обозначен 2-мерный символ Леви-Чивиты. Последнему требованию легко удовлетворить, воспользовавшись следующими соотношениями

$$\begin{vmatrix} i'^1 & k'^1 \\ i'^2 & k'^2 \end{vmatrix} = \det C_2 \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha'^1 & \beta'^1 \\ \alpha'^2 & \beta'^2 \end{vmatrix} = \det \widetilde{C}_2 \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix}, \tag{6}$$

где $C_2 = \|C^r_s\|$, а $\widetilde{C}_2 = \|\widetilde{C}^r_s\|$. В самом деле, непосредственно из (6) видно, что определители (5) инвариантны тогда и только тогда, когда матрицы C_2 и $\widetilde{C}_2$ унимодулярны:

$$\det C_2 = 1, \quad \det \widetilde{C}_2 = 1. \tag{7}$$

Таким образом, искомые преобразования получаются из (3) в результате подчинения соответствующих матриц условиям (7). Эти преобразования, как известно, образуют группу $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$.

Выражения $[i,k] = \varepsilon_{rs} i^r k^s$ и $[\alpha,\beta] = \varepsilon_{rs}\alpha^r\beta^s$ из (5), очевидно, представляют собой антисимметричные билинейные формы на $\mathbf{C}^2$, причем в силу $\det\|\varepsilon_{rs}\| = 1 \neq 0$ — невырожденные. С точностью до изометрии они являются наиболее общими симплектическими скалярными произведениями в двух измерениях. Поэтому $(\mathcal{M};[\ ,\ ])$ и $(\mathcal{N};[\ ,\ ])$ суть 2-мерные симплектические пространства над полем $\mathbf{C}$. Роль метрического тензора в них играет символ Леви-Чивиты ε_{rs}, при помощи которого можно, например, определить операцию опускания индекса: $i_r = \varepsilon_{rs} i^s$, $\alpha_r = \varepsilon_{rs}\alpha^s$. Группой изометрий этих пространств является группа $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C}) = \mathrm{Sp}(2,\mathbf{C})$.

Напомним, что согласно традиционному подходу [5] 2-спинор (спинвектор) определяется как элемент 2-мерного линейного пространства над полем $\mathbf{C}$, наделенного невырожденным симплектическим скалярным умножением. Но $(\mathcal{M};[\ ,\ ])$ и $(\mathcal{N};[\ ,\ ])$ как раз являются такими пространствами. Это обстоятельство позволяет утверждать, что параметры элементов множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ представляют собой компоненты 2-спиноров.

До сих пор $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ предполагались совершенно независимыми друг от друга. Однако с физической точки зрения наиболее интересным представляется случай, когда они полулинейно изоморфны как линейные пространства (только в этом случае можно получить 4-мерную псевдоевклидову геометрию и группу Лоренца). В явном виде полулинейный изоморфизм $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$ определим при помощи следующих соотношений

$$\alpha^r = \overline{i^r}, \ \beta^r = \overline{k^r}, \ldots, \tag{8}$$

где горизонтальная черта означает комплексное сопряжение. Ясно, что теперь матрицы преобразований (3) уже не могут быть независимыми, а их элементы с необходимостью должны удовлетворять условиям: $\widetilde{C}^r_s = \overline{C^r_s}$. По традиции, всюду в дальнейшем индексы величин, преобразующихся с помощью матрицы $\overline{C}_2 = \|\overline{C^r_s}\|$, будем отмечать сверху точками (так называемые пунктирные индексы).

Как было указано выше, $(\mathcal{M}; [\ ,\ ])$ представляет собой пространство 2-спиноров. Но тогда $(\mathcal{N}; [\ ,\ ])$, для которого в силу (8) $[\alpha, \beta] = \overline{[i, k]}$, является пространством комплексно сопряженных 2-спиноров. Именно на основе этих двух пространств обычно строится общая спинтензорная алгебра [5].

Рассмотрим парное отношение $u_{i\beta}$ между элементами $i \in \mathcal{M}$ и $\beta \in \mathcal{N}$. С помощью (8) оно может быть представлено в виде:

$$u_{i\beta} = i^1\beta^{\dot{1}} + i^2\beta^{\dot{2}} = i^1\overline{k^{\dot{1}}} + i^2\overline{k^{\dot{2}}} \equiv \langle i, k\rangle. \tag{9}$$

Форма $\langle i, k\rangle = \delta_{r\dot{s}} i^r \overline{k^{\dot{s}}}$, где $\delta_{r\dot{s}}$ — символ Кронекера, очевидно, полуторалинейна (линейна по первому аргументу и полулинейна — по второму: $\langle \lambda i, \rho k\rangle = \lambda\overline{\rho}\langle i, k\rangle$; $\lambda, \rho \in \mathbf{C}$), эрмитова ($\langle k, i\rangle = \overline{\langle i, k\rangle}$) и положительно определена ($\langle i, i\rangle > 0$ при $i^r \neq 0$). Это позволяет интерпретировать (9) как унитарное скалярное произведение элементов i и k. Таким образом, $(\mathcal{M}; \langle\ ,\ \rangle)$ является 2-мерным унитарным пространством, в котором роль скалярных произведений играют парные отношения (2). То же, конечно, относится и к пространству $(\mathcal{N}; \langle\ ,\ \rangle)$, для которого согласно (8) – (9) имеем $\langle \alpha, \beta\rangle = \overline{\langle i, k\rangle}$.

Введенных выше понятий достаточно для явного построения векторов 4-мерного псевдоевклидова пространства с метрикой, имеющей сигнатуру $(+---)$, и преобразований из собственной ортохронной группы Лоренца $\mathrm{O}^{\uparrow}_{+}(1,3)$.

Следуя работе [4], рассмотрим контравариантный спинтензор специального вида с одним обычным и одним пунктирным индексами:

$$P^{r\dot{s}} = i^r\alpha^{\dot{s}} + k^r\beta^{\dot{s}}. \tag{10}$$

Пусть $P_2 = \|P^{r\dot{s}}\|$. Тогда на основании формул (8) и (10) имеем $P^{r\dot{s}} = \overline{P^{s\dot{r}}}$ или, что то же самое, $P_2 = P_2^+$ (здесь и далее крест означает эрмитово сопряжение). Таким образом, матрица P_2 является эрмитовой.

Нетрудно видеть, что $P^{1\dot{1}} = \left|i^1\right|^2 + \left|k^1\right|^2 \geq 0$. Далее, в силу (10), (4) – (5) и (8)

$$\det P_2 = \begin{bmatrix} \alpha\, \beta \\ i\;\, k \end{bmatrix} = \left|[i, k]\right|^2 \geq 0. \tag{11}$$

Но фундаментальное 2×2-отношение (4) строго положительно тогда и только тогда, когда элементы i и k линейно независимы. Таким образом, если i и k образуют базис в $\mathcal{M}$, то $P^{1\dot{1}} > 0$ и $\det P_2 > 0$, а значит согласно критерию Сильвестра матрица P_2 является положительно определенной.

Как было установлено выше, $P_2 = P_2^+$. Иначе говоря, P_2 является элементом 4-мерного линейного пространства Herm (2) над полем $\mathbf{R}$, образованного всеми эрмитовыми 2×2-матрицами. В качестве базиса Herm (2) выберем единичную матрицу σ^0 и три матрицы Паули $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Здесь i — мнимая единица: $\mathrm{i}^2 = -1$. Тогда справедливо разложение

$$P_2 = p_\mu \sigma^\mu \quad (\mu = \overline{0, 3}), \tag{13}$$

где $p_0, \ldots, p_3 \in \mathbf{R}$ — координаты P_2 относительно базиса $\{\sigma^\mu\}$. С помощью (13) нетрудно выразить p_μ непосредственно через компоненты спинтензора (10):

$$\begin{aligned}
p_0 &= \frac{1}{2}(P^{1\dot{1}} + P^{2\dot{2}}) = \frac{1}{2}(i^1\alpha^{\dot{1}} + i^2\alpha^{\dot{2}} + k^1\beta^{\dot{1}} + k^2\beta^{\dot{2}}),\\
p_1 &= \frac{1}{2}(P^{1\dot{2}} + P^{2\dot{1}}) = \frac{1}{2}(i^1\alpha^{\dot{2}} + i^2\alpha^{\dot{1}} + k^1\beta^{\dot{2}} + k^2\beta^{\dot{1}}),\\
p_2 &= \frac{\mathrm{i}}{2}(P^{1\dot{2}} - P^{2\dot{1}}) = \frac{\mathrm{i}}{2}(i^1\alpha^{\dot{2}} - i^2\alpha^{\dot{1}} + k^1\beta^{\dot{2}} - k^2\beta^{\dot{1}}),\\
p_3 &= \frac{1}{2}(P^{1\dot{1}} - P^{2\dot{2}}) = \frac{1}{2}(i^1\alpha^{\dot{1}} - i^2\alpha^{\dot{2}} + k^1\beta^{\dot{1}} - k^2\beta^{\dot{2}}).
\end{aligned} \tag{14}$$

Используя тот факт, что $\mathrm{tr}\,(\sigma^\mu\sigma^\nu) = 2\delta^{\mu\nu}$ и, вводя обозначения $\sigma_\mu \equiv \delta_{\mu\nu}\sigma^\nu$, $\mathbf{i} \equiv (i^1, i^2)^\top$, $\mathbf{k} \equiv (k^1, k^2)^\top$ ($\top$ — значок матричного транспонирования), получаем более компактную форму записи этих соотношений:

$$p_\mu = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(\sigma_\mu P_2) = \frac{1}{2}(\mathbf{i}^+\sigma_\mu\mathbf{i} + \mathbf{k}^+\sigma_\mu\mathbf{k}). \tag{14$'$}$$

Далее будут найдены условия, при выполнении которых вектор p_μ, имеющий компоненты (14), совпадает с 4-импульсом свободного фермиона.

Вычислим определитель от левой и правой частей равенства (13). Очевидно, $\det P_2 = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$. С другой стороны, имеет место формула (11). Таким образом, фундаментальное 2×2-отношение (4) представляет собой не что иное как псевдоевклидов скалярный квадрат 4-вектора p_μ

$$\begin{bmatrix} \alpha\,\beta \\ i\;k \end{bmatrix} = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \equiv p^2 \geq 0, \qquad (15)$$

где $\|g^{\mu\nu}\| = \operatorname{diag}(1,-1,-1,-1)$ — метрический тензор пространства $\mathbf{R}^4_{1,3}$. Кроме того, из (15) вытекает, что p_μ либо времениподобен (когда i и k линейно независимы), либо изотропен (когда i и k линейно зависимы). Поскольку, вдобавок, $p_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{i}^+\mathbf{i} + \mathbf{k}^+\mathbf{k}) > 0$, вектор p_μ принадлежит верхней полé изотропного конуса в $\mathbf{R}^4_{1,3}$.

Рассмотрим преобразование $P'^{r\dot{s}} = C^r_t \overline{C^{\dot{s}}_{\dot{u}}} P^{t\dot{u}}$ спинтензора (10) и перепишем его в эквивалентной матричной форме:

$$P_2' = C_2 P_2 C_2^+ \equiv \widehat{L}(C_2) P_2. \qquad (16)$$

Оператор $\widehat{L}(C_2)$, действующий на комплексные 2×2-матрицы, — в данном случае на P_2 — очевидно, обладает следующими свойствами:

1^0 $\widehat{L}(C_2)$ — линейный оператор;
2^0 $\widehat{L}(C_2)$ переводит эрмитовы матрицы в эрмитовы;
3^0 $\widehat{L}(C_2)\widehat{L}(\widetilde{C}_2) = \widehat{L}(C_2\widetilde{C}_2)$ для любых $C_2, \widetilde{C}_2 \in \mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$.

На основании 1^0 и 2^0 делаем вывод, что (16) является линейным преобразованием в пространстве $\mathrm{Herm}\,(2)$.

Используя (12), представим преобразование (16) в виде

$$p'_\mu = L(C_2)_\mu{}^\nu p_\nu \quad (\mu,\nu = \overline{0,3}), \qquad (17)$$

где $L(C_2) = \|L(C_2)_\mu{}^\nu\|$ — матрица оператора $\widehat{L}(C_2)$ относительно базиса $\{\sigma^\mu\}$. Подставляя в (16) вместо P_2 и P_2' их разложения по базису (12) и, используя тот факт, что $\operatorname{tr}(\sigma_\mu\sigma^\nu) = 2\delta^\nu_\mu$, приходим к следующим формулам для (действительных) элементов этой 4×4-матрицы:

$$L(C_2)_\mu{}^\nu = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\sigma_\mu C_2 \sigma^\nu C_2^+). \qquad (18)$$

Из (18), в частности, следует, что $L(C_2)_0{}^0 > 0$ для любой ненулевой матрицы C_2.

Вычисляя определитель от левой и правой сторон (16), получаем формулу: $\det P_2' = |\det C_2|^2 \det P_2$. Однако, как было установлено выше, $\det P_2 = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ (аналогично, $\det P_2' = g^{\mu\nu} p'_\mu p'_\nu$). Таким образом,

$$g^{\mu\nu} p'_\mu p'_\nu = |\det C_2|^2 g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu, \tag{19}$$

т. е. при $C_2 \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$ преобразование (17) является конформным.

Пусть $\det C_2 = 1$. Тогда, в соответствии с (19), имеем: $p^2 = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = \mathrm{inv}$. Это означает, что при $C_2 \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ преобразование (17) принадлежит группе Лоренца $\mathrm{O}(1,3)$. Более того, отображение $C_2 \mapsto L(C_2)$, сопоставляющее каждой унимодулярной 2×2-матрице над полем $\mathbf{C}$ действительную 4×4-матрицу линейного оператора $\widehat{L}(C_2)$ в базисе $\{\sigma^\mu\}$, является известным эпиморфизмом (сюръективным гомоморфизмом) группы $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ на группу $\mathrm{O}_+^\uparrow(1,3)$ [5]. Гомоморфность указанного отображения вытекает из свойства 3^0 оператора $\widehat{L}(C_2)$.

3. Уравнение Дирака для свободного фермиона в импульсном представлении

Благодаря наличию в $\mathcal{M}$ одновременно двух скалярных умножений — симплектического $[\ ,\ ]$ и унитарного $\langle\ ,\ \rangle$ — существует естественный полулинейный автоморфизм этого пространства, сопоставляющий каждому элементу $k_\circ \in \mathcal{M}$ определенный элемент $i_\circ \in \mathcal{M}$ согласно формуле $i_\circ^r = \delta^{r\dot{s}} \varepsilon_{\dot{s}\dot{u}} \overline{k_\circ^{\dot{u}}}$. Исходя из этого, сугубо *математического* по своему происхождению, соотношения, в работе [3] было получено уравнение для спиновой части волновой функции свободного фермиона с фиксированными энергией и импульсом. Обсудим *физические* допущения, лежащие в основе указанного соотношения и приводящие к свободному уравнению Дирака в импульсном представлении.

Прежде всего, обратим внимание на одно обстоятельство общего характера. Всякая элементарная частица характеризуется двумя типами свойств: физическими (энергия, импульс, спин, заряд, ...) и геометрическими (положение в пространстве-времени). При квантовом описании такой частицы естественно интересоваться именно ее физическими характеристиками, которые только и измеряются в экспериментах (атомная и ядерная спектроскопия, ускорители частиц высоких энергий). Поэтому состояние свободной частицы будем характеризовать ее импульсом и спиновыми поляризациями, а ее волновую функцию будем задавать в *импульсном представлении.*

В нашем распоряжении уже есть 2-спиноры и унитарное скалярное умножение $\langle\ ,\ \rangle$. Напрашивается следующая физическая интерпретация: компоненты спинора $i^r_\circ$ $(r = 1, 2)$ представляют собой амплитуды вероятности обнаружить фермион в одном из двух возможных спиновых состояний. При этом подразумевается выполненным условие нормировки $\langle i_\circ, i_\circ\rangle = |i^1_\circ|^2 + |i^2_\circ|^2 = 1$, т. е. сумма вероятностей спиновых состояний равна единице (фермион обязательно находится в каком-то спиновом состоянии).

Однако пока нельзя сказать ничего определенного об амплитуде вероятности обнаружить фермион в состоянии с некоторым импульсом. Для этого необходима комплекснозначная функция на пространстве 3-мерных импульсов, да еще, с учетом спиновых состояний, — двухкомпонентная. Чтобы ее построить, понадобятся, прежде всего, сами векторы импульсов свободного фермиона. Их легко получить при помощи результатов предыдущего раздела статьи. Но перед этим сделаем еще одно весьма важное предположение.

Речь идет о зеркальной симметрии или P-инвариантности. В неживой природе (за исключением процессов, связанных со слабым взаимодействием) наблюдается симметрия по отношению к замене правого левым. В частности, допустимая волновая функция частицы при зеркальном отражении должна переходить в другую допустимую волновую функцию. P-отражение (пространственная инверсия) действует на любой истинный 4-вектор p_μ по правилу: $p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_3 \mapsto p_0,\ -p_1,\ -p_2,\ -p_3$. Как оно действует на спиноры?

Ясно, что группа $\mathrm{O}^\uparrow_+(1,3)$, а значит и группа $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$, не содержат P-отражений. Тем не менее, из формул (14) следует, что P-отражение 4-вектора p_μ равносильно преобразованию спинтензорных компонент: $P^{1\dot 1} \mapsto P^{2\dot 2}$, $P^{2\dot 2} \mapsto P^{1\dot 1}$, $P^{1\dot 2} \mapsto -P^{1\dot 2}$, $P^{2\dot 1} \mapsto -P^{2\dot 1}$. Последнее можно переписать в компактной форме: $P^{r\dot s} \mapsto P_{s\dot r}$, где $P_{s\dot r} \equiv \varepsilon_{st}\varepsilon_{\dot r\dot u}P^{t\dot u}$. При повторном применении P-отражения 4-вектор p_μ вместе с эквивалентным ему спинтензором $P^{r\dot s}$ должны вернуться в исходное (непреобразованное) состояние, т. е. $P_{s\dot r} \mapsto P^{r\dot s}$. Таким образом, чтобы иметь объекты, преобразующиеся в себя при P-отражении, необходимо ввести в рассмотрение упорядоченные пáры спинтензоров разной валентности: $(P^{r\dot s}, P_{s\dot r})$. На такие пáры P-отражение действует по правилу: $(P^{r\dot s}, P_{s\dot r}) \mapsto (P_{s\dot r}, P^{r\dot s})$. Иначе говоря, оно переставляет элементы пары местами.

Естественно ожидать, что на спиноры P-отражение действует аналогичным образом. Положим, что соответствующее преобразование имеет вид: $(i^r, \alpha_{\dot r}) \mapsto (\alpha_{\dot r}, i^r)$, $(k^r, \beta_{\dot r}) \mapsto (\beta_{\dot r}, k^r)$, где $\alpha_{\dot r} = \varepsilon_{\dot r \dot u}\alpha^{\dot u}$, $\beta_{\dot r} = \varepsilon_{\dot r \dot u}\beta^{\dot u}$. Правильность данного предположения вытекает из формул (14) для компонент 4-вектора p_μ, который ведет себя при таком преобразовании подобающим для P-отражения образом: p_0, p_1, p_2, $p_3 \mapsto p_0$, $-p_1$, $-p_2$, $-p_3$. Поскольку в реляционном подходе 4-векторы являются вторичными и строятся из 2-спиноров, более правильно говорить, что P-отражение возникает как представление указанного спинорного преобразования.

Преобразование $(i^r, \beta_{\dot r}) \mapsto (\beta_{\dot r}, i^r)$ — не единственный возможный способ определения P-отражения спиноров, хотя и самый простой. Другие варианты получаются из него дополнительным умножением на комплексное число с единичным модулем [6].

Подведем итог представленных рассуждений. С одной стороны, фермион имеет две спиновые поляризации и его волновая функция должна описываться одним 2-спинором $i^r_\circ$. С другой стороны, P-инвариантность требует одновременного рассмотрения двух разных 2-спиноров $(i^r_\circ, \beta_{\circ\dot s})$. Чтобы устранить «лишние» компоненты, необходимо наложить на 2-спиноры $i^r_\circ$ и $\beta_{\circ\dot s}$ такие условия связи, которые оставляли бы независимыми только две из четырех спинорных компонент. Кроме того, они сами по себе должны быть $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$- и P-ковариантными.

Простейшие такие условия имеют вид:

$$\left.\begin{array}{l} \delta^{r\dot s}\beta_{\circ\dot s} = i^r_\circ \\ \delta_{s\dot r}\, i^s_\circ = \beta_{\circ\dot r} \end{array}\right\}. \tag{20}$$

Далее будет показано, что эти условия однозначно приводят к уравнению Дирака для свободного фермиона с положительной энергией в импульсном представлении. Автор полностью разделяет точку зрения С. Вайнберга: «...уравнение Дирака есть просто лоренц-инвариантная запись соглашения, использованного для нахождения поля, обладающего простыми трансформационными свойствами относительно преобразования пространственной инверсии» [7].

Подействуем на условия (20) произвольным преобразованием из группы $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$. В результате будем иметь

$$\left.\begin{array}{l} U^{r\dot s}\beta_{\dot s} = i^r \\ U_{s\dot r}\, i^s = \beta_{\dot r} \end{array}\right\}, \tag{21}$$

где $i^r = C^r_u i^u_\circ$, $\beta_{\dot s} = \overline{(C^{-1})^{\dot u}_{\dot s}}\beta_{\circ\dot u}$, $U^{r\dot s} = C^r_p \overline{C^{\dot s}_{\dot q}}\delta^{p\dot q}$, $U_{s\dot r} = (C^{-1})^p_s \overline{(C^{-1})^{\dot q}_{\dot r}}\delta_{p\dot q}$ и $\det\|C^r_s\| = 1$. Вводя обозначения $U_2 \equiv \|U^{r\dot s}\|$ и $C_2 \equiv \|C^r_s\|$, приходим к заключению, что $U_2 = C_2 C_2^+$. Значит $U_2 \in \mathrm{Herm}\,(2)$ и, кроме того, является положительно определенной матрицей. Поэтому к ней применимы все построения предыдущего раздела. В частности, справедлива формула

$$U_2 = u_\mu \sigma^\mu, \tag{22}$$

где u_μ — некоторый времениподобный 4-вектор. Поскольку $C_2 \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$, то $\det U_2 = \det(C_2 C_2^+) = 1$. С другой стороны, $\det U_2 = g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu$. Таким образом, $g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = 1$. На этом основании будем интерпретировать u_μ как 4-скорость массивного фермиона.

Здесь уместно сделать следующее замечание. В классической механике определение 4-скорости материальной точки предполагает дифференцирование ее координат по 4-интервалу s. В квантовой механике, в силу известных соотношений неопределенностей Гейзенберга, при точно заданных энергии и импульсе частицы нельзя сказать вообще ничего определенного не только о ее пространственных координатах, но даже и о временной. Иными словами, классическое определение 4-скорости теряет всякий смысл. Поэтому в данной статье принимается точка зрения, согласно которой первичным следует считать не координатное, а импульсное пространство.

В соответствии с теоремой о полярном разложении линейного оператора [8], любая унимодулярная матрица C_2 над полем $\mathbf{C}$ допускает единственное представление в виде произведения $C_2 = HU$ положительно определенной эрмитовой матрицы $H \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ и унитарной матрицы $U \in \mathrm{SU}(2)$. Следовательно, $U_2 = (HU)(HU)^+ = HUU^+H^+ = H^2$, т. е. характеризуется всего тремя независимыми действительными параметрами. Последние можно выбрать многими способами. Остановимся, например, на такой параметризации: $H = b_\mu \sigma^\mu$, $\det H = g^{\mu\nu} b_\mu b_\nu = 1$, $b_0 + b_3 > 0$. Простое вычисление дает тогда

$$U_2 = H^2 = \begin{pmatrix} (b_0 + b_3)^2 + b_1^2 + b_2^2 & 2b_0(b_1 - \mathrm{i}b_2) \\ 2b_0(b_1 + \mathrm{i}b_2) & (b_0 - b_3)^2 + b_1^2 + b_2^2 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Сравнивая (22) и (23), приходим к формулам, выражающим компоненты u_μ 4-скорости массивной частицы непосредственно через параметры b_μ рассматриваемого $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$-преобразования:

$$u_0 = b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2, \quad u_1 = 2b_0 b_1, \quad u_2 = 2b_0 b_2, \quad u_3 = 2b_0 b_3. \tag{24}$$

В силу условий $g^{\mu\nu} b_\mu b_\nu = 1$, $b_0 + b_3 > 0$ и $u_0 + u_3 > 0$ из (24) с однозначностью следует

$$b_0 = \sqrt{\frac{u_0+1}{2}}, \quad b_k = \frac{u_k}{\sqrt{2(u_0+1)}} \quad (k = \overline{1,3}). \tag{25}$$

Таким образом, соотношения (21) принимают вид

$$(u_\mu \sigma^\mu)^{r\dot{s}} \beta_{\dot{s}} = i^r, \tag{26}$$

$$(u_0 \sigma^0 - u_k \sigma^k)_{\dot{s}r}\, i^r = \beta_{\dot{s}} \quad (k = \overline{1,3}), \tag{27}$$

где u_μ задаются формулами (24). Вспоминая определение 4-импульса $\mathrm{p}_\mu = m u_\mu$ частицы через ее массу (некоторую размерную константу m) и 4-скорость u_μ (в системе единиц, где скорость света $c = 1$), а также вводя биспинор $u_{\vec{\mathrm{p}}} \equiv (i^1, i^2, \beta_{\dot{1}}, \beta_{\dot{2}})^\top$ и $4{\times}4$-матрицы

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

удовлетворяющие условиям $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$, объединяем (26) и (27) в одно матричное равенство:

$$(\mathrm{p}_\mu \gamma^\mu - m) u_{\vec{\mathrm{p}}} = 0. \tag{29}$$

Это — уравнение Дирака для *спиновой части* волновой функции свободного фермиона с массой m и импульсом $\vec{\mathrm{p}} \equiv (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3)$. Выясним более детально структуру биспинора $u_{\vec{\mathrm{p}}}$.

Следует отметить, что при преобразованиях из группы SU(2) $\delta'^{r\dot{s}} = \delta^{r\dot{s}}$ и $i^r \sim \beta_{\dot{r}}$. Это означает, что такие преобразования оставляют (20) инвариантными и всегда могут быть исключены из рассмотрения при осуществлении перехода от (20) к (21). Таким образом, $i^r = H^r_u i^u_\circ$, $\beta_{\dot{s}} = \overline{(H^{-1})^{\dot{u}}_{\dot{s}}}\beta_{\circ\dot{u}}$. Используя формулы (25), $u_\mu = \mathrm{p}_\mu/m$ и $H = b_\mu\sigma^\mu$, получаем

$$u_{\vec{\mathrm{p}}} = M(\vec{\mathrm{p}}) u_{\vec{0}}, \quad M(\vec{\mathrm{p}}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{p}_0 + m + \mathrm{p}_k\sigma^k}{\sqrt{2m(\mathrm{p}_0+m)}} & 0 \\ 0 & \dfrac{\mathrm{p}_0 + m - \mathrm{p}_k\sigma^k}{\sqrt{2m(\mathrm{p}_0+m)}} \end{pmatrix}, \tag{30}$$

где $\mathrm{p}_0 = \sqrt{\vec{\mathrm{p}}^2 + m^2}$, а $u_{\vec{0}} = (i^1_\circ, i^2_\circ, \beta_{\circ\dot{1}}, \beta_{\circ\dot{2}})^\top$ (напомним, что согласно (20) $\beta_{\circ\dot{r}} = \delta_{s\dot{r}}\, i^s_\circ$). Очевидно, биспинор $u_{\vec{0}}$ относится к покоящемуся фермиону с положительной энергией $\mathrm{p}_0 = m$.

Теперь можно выяснить связь между вектором (14) и 4-импульсом p_μ свободного фермиона. Пусть, как обычно, $\overline{u}_{\vec{\mathrm{p}}} = u^+_{\vec{\mathrm{p}}}\gamma^0$ — дираковски сопряженный биспинор. Нетрудно видеть, что $\overline{u}_{\vec{\mathrm{p}}} u_{\vec{\mathrm{p}}} = [i,k] + [\alpha,\beta]$, т. е. является $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$-инвариантом. Аналогичное вычисление в обозначениях формулы (14′) дает $\overline{u}_{\vec{\mathrm{p}}}\gamma_\mu u_{\vec{\mathrm{p}}} = \mathbf{i}^+\sigma_\mu\mathbf{i} + \mathbf{k}^+\sigma_\mu\mathbf{k}$, где $\gamma_\mu \equiv g_{\mu\nu}\gamma^\nu$. Следовательно, $\overline{u}_{\vec{\mathrm{p}}}\gamma_\mu u_{\vec{\mathrm{p}}}$ — времениподобный 4-вектор. В силу (20) имеет место элементарно проверяемое тождество $(i^r_\circ\alpha^{\dot{s}}_\circ + k^r_\circ\beta^{\dot{s}}_\circ)/([i_\circ,k_\circ] + [\alpha_\circ,\beta_\circ]) = \frac{1}{2}\delta^{r\dot{s}}$. Подвергая последнее действию того же самого $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$-преобразования, что и при переходе от (20) к (21), а также учитывая разложение (22), получаем: $(u_\mu\sigma^\mu)^{r\dot{s}} = 2\,(i^r\alpha^{\dot{s}} + k^r\beta^{\dot{s}})/([i,k]+[\alpha,\beta])$. Отсюда, после умножения на массу m, находим компоненты 4-импульса фермиона в виде:

$$\mathrm{p}_\mu = m\frac{\mathbf{i}^+\sigma_\mu\mathbf{i} + \mathbf{k}^+\sigma_\mu\mathbf{k}}{[i,k]+[\alpha,\beta]} = m\frac{\overline{u}_{\vec{\mathrm{p}}}\gamma_\mu u_{\vec{\mathrm{p}}}}{\overline{u}_{\vec{\mathrm{p}}}u_{\vec{\mathrm{p}}}}. \tag{31}$$

Из сопоставления формул (14′) и (31) следует, что при нормировке биспинора $u_{\vec{\mathrm{p}}}$ инвариантным условием $\overline{u}_{\vec{\mathrm{p}}}u_{\vec{\mathrm{p}}} = 2m$ вектор (14) в точности совпадает с 4-импульсом свободного фермиона.

Вернемся, однако, к вопросу о построении *полной* волновой функции свободного фермиона с положительной энергией в импульсном представлении. Формулы (24) и (25) устанавливают взаимно однозначное соответствие между компонентами u_k ($k=\overline{1,3}$) 4-скорости фермиона и независимыми параметрами b_k эрмитовой матрицы $H \in \mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$, определяющей лоренцев буст. Поскольку $\mathrm{p}_k = mu_k$, а параметры b_k совершенно произвольны, тем самым получено пространство $\mathbf{R}^3$ возможных импульсов фермиона.

Заметим, что матричное равенство (29) является однородным. Оно состоит из четырех линейных алгебраических соотношений между компонентами биспинора (30). Всегда допустимо умножение каждого из этих соотношений на *свою* комплексную константу, причем при разных $\vec{\mathrm{p}} \in \mathbf{R}^3$ такие константы могут быть *разными*. В силу условий (20) этот произвол можно описать *двумя* комплекснозначными функциями импульса $\beta_{\dot{r}}(\vec{\mathrm{p}}) = \delta_{s\dot{r}}\, i^s(\vec{\mathrm{p}})$ такими, что $i^s(\vec{0}) = i^s_\circ$. Функции $i^s(\vec{\mathrm{p}})$ и определяют, после соответствующей нормировки, амплитуды вероятности различных значений импульса $\vec{\mathrm{p}}$.

Таким образом, полная волновая функция $\psi(\vec{\mathrm{p}})$ свободного фермиона с положительной энергией в импульсном представлении может быть получена посредством очевидной минимальной модификации формул

(30), что приводит к

$$\psi(\vec{\mathrm{p}})=\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{p}_0+m+\mathrm{p}_k\sigma^k}{\sqrt{2m(\mathrm{p}_0+m)}} & 0\\ 0 & \dfrac{\mathrm{p}_0+m-\mathrm{p}_k\sigma^k}{\sqrt{2m(\mathrm{p}_0+m)}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i^1(\vec{\mathrm{p}})\\ i^2(\vec{\mathrm{p}})\\ \delta_{s\dot{1}}i^s(\vec{\mathrm{p}})\\ \delta_{s\dot{2}}i^s(\vec{\mathrm{p}})\end{pmatrix}, \qquad (32)$$

где $\mathrm{p}_0=\sqrt{\vec{\mathrm{p}}^2+m^2}$, $\vec{\mathrm{p}}\in\mathbf{R}^3$, а произвольные функции $i^s(\vec{\mathrm{p}})$ нормированы стандартным условием: $\int\psi^+(\vec{\mathrm{p}})\psi(\vec{\mathrm{p}})\,d\vec{\mathrm{p}}=1$. Согласно (29) и самому способу ее построения волновая функция (32) автоматически удовлетворяет свободному уравнению Дирака в импульсном представлении:

$$(\mathrm{p}_\mu\gamma^\mu-m)\psi(\vec{\mathrm{p}})=0;\quad \mathrm{p}_0=\sqrt{\vec{\mathrm{p}}^2+m^2},\ \vec{\mathrm{p}}\in\mathbf{R}^3. \qquad (33)$$

Тем самым построен волновой пакет общего вида для дираковской частицы с массой m и положительной энергией в импульсном пространстве.

4. Заключение

Завершая статью, следует указать на несколько обстоятельств.

Уравнение Дирака (33) возникло как следствие $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$- и P-ковариантных условий (20), убирающих «лишние» биспинорные компоненты. Причиной же возникновения самих «лишних» компонент явилось требование зеркальной симметрии.

Пространство 3-мерных импульсов свободного фермиона обязано своим возникновением 3-параметрическому семейству эрмитовых матриц $H\in\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$, использованных при выводе уравнения (29). Эти матрицы необходимы для приготовления спинового состояния фермиона с ненулевым импульсом из спинового состояния того же фермиона с нулевым импульсом.

Формирование полной волновой функции (32) свободного фермиона с положительной энергией и любым распределением импульсов происходит за счет специфической структуры системы линейных алгебраических уравнений (29), допускающих умножение на две произвольные функции 3-мерного импульса.

Следует отметить, что нами *нигде не использовалось представление о готовом пространственно-временном фоне.* Использовались лишь понятия, присущие БСКО ранга $(3,3)$. И, тем не менее, удалось построить самосогласованное квантовое описание свободного массивного фермиона с положительной энергией.

В статье вовсе не рассматривались взаимодействия фермионов. В рамках реляционного подхода — это отдельная большая задача. По мнению автора, для решения этой задачи наиболее полезной может оказаться концепция *источника*, положенная Ю. Швингером в основу его подхода к физике частиц высоких энергий [9].

Если принять идею, что любое взаимодействие элементарных частиц сводится к обмену между ними физическими характеристиками (энергией, импульсом, спином, зарядом, ...), которые и составляют в совокупности то, что называют частицей в эксперименте, то становится понятным, что единственным актом взаимодействия является испускание либо поглощение соответствующих характеристик. Естественно, должны существовать источники (стоки), ответственные за такое испускание (поглощение). Вот как об этом писал Ю. Швингер: «Источники вводятся для того, чтобы можно было идеализированно описывать процессы порождения и детектирования частиц. (...) Элементарные акты, которые рассматриваются как результат действия источников, — это рождение одиночной частицы там, где раньше ничего не было, и уничтожение такой одиночной частицы» [9].

Эффективность концепции источников легко продемонстрировать на примере уравнения Дирака (33). Если ввести в его правую часть неоднородность (источник), то мы немедленно получим фейнмановский пропагатор виртуального фермиона. Особенная простота соответствующих формул обусловлена использованием импульсного представления. В следующей статье будет показано, что таким способом вполне можно описывать взаимодействия фермиона с другими частицами.

Автор весьма признателен Ю.С. Владимирову и С.В. Болохову за многочисленные плодотворные обсуждения вопросов, затронутых в этой работе.

Список литературы

[1] Владимиров Ю.С. Основания физики. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.

[2] Твисторы и калибровочные поля. Сб. статей. — М.: Мир, 1983.

[3] Владимиров Ю.С., Соловьев А.В. Уравнение Дирака в бинарной геометрофизике. — Изв. вузов. Физика. — 2000. — №11. — С. 63–71.

[4] Владимиров Ю.С. Биспиноры и физическая структура ранга $(3, 3)$. — Вычислительные системы. — Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1988. — Вып. 125. — С. 42–60.

[5] Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. Двaспинорное исчисление и релятивистские поля. — М.: Мир, 1987.

[6] Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1989.

[7] Вайнберг С. Квантовая теория поля. Т. 1. Общая теория. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

[8] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988.

[9] Швингер Ю. Частицы, источники, поля. — М.: Мир, 1973.