Николенко А. Д.

ЗАГАДКИ МЕХАНИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ: ПАРАДОКС ЗЕНОНА И КОРПУСКУЛЯРНО-ВОЛНОВОЙ ДУАЛИЗМ

Институт исследований природы Времени
E-mail: alniko@ukr.net

Развивается подход Д. Гильберта к исследованию природы непрерывного механического движения с использованием парадокса Зенона. Показано, что последовательность Зенона позволяет обнаружить скрытую сингулярность в рамках классического описания механического движения. Возникновение этой сингулярности связано с аддитивностью интервалов движения. Неаддитивность в описании движения и исчезновение сингулярности проявляется только вне рамок классической механики, и связано с квантовой механикой. Сделан вывод, что любое непрерывное механическое движение возможно в результате обладания материальными частицами волновыми свойствами и оно является наиболее наглядным проявлением эффектов квантовой механики в макромире. Обладание волновыми свойствами является неизбежной необходимостью для обеспечения подвижности материальных частиц и состоящих из них материальных тел. Это приводит к такому парадоксальному явлению физической природы, как корпускулярно-волновой дуализм, без которого существование динамических объектов и структур нашего мира оказывается невозможным.

Ключевые слова: природа физического движения; парадокс Зенона; классическая механика; квантовая механика; волновые свойства частиц; корпускулярно-волновой дуализм.
PACS: 01.55.+b, 03.65.-w

I. Проблемы в понимании движения в рамках классической механики

За пять столетий до нашей эры древнегреческий философ Зенон из Элеи, ученик Парменида, поразил своих современников своими парадоксальными рассуждениями - апориями. Именно начиная с Парменида и Зенона Элейского возник научный метод, заключающийся в утверждении некоторго высказывания и его доказательстве. Раньше научные идеи доносились до любопытствующего общества в форме песнопений. К сожалению и сейчас некоторые «исследователи» предпочитают изрекать придуманные ими «истины», не особо утруждая себя доказательствами. Хорошо, что дело еще не дошло до песнопений.

Идея выстраивания логических рассуждений и утверждений, подкрепляемых доказательствами, привела к одной из самых первых революции в науке. Можно даже сказать, что она собственно науку в современном понимании и породила.

Второй потрясающей результат апорий Зенона – это то, что строго доказанное утверждение совершенно не соответствовало тому, что мы видим, что дано нам в ощущениях. Впервые доказанный факт противоречил реальности! Судя по всему, это было первое проявление, «выход в свет» квантовой механики, несущей в себе свои знаментые парадоксы.

До нас дошли лишь немногие из апорий Зенона. Далее мы будем испльзовать только одну из них – о черепахе и бесконечно догоняющем ее быстроногом Ахиллесе, именуя ее «парадоксом Зенона».

К концу XIX века классическая механика практически полностью сформировалась и возникла иллюзия завершенности физической науки, прекрасной в своей целостности и всеобщности. Некоторые «шереховатости», вроде проблем с эфиром и апориями Зенона, либо игнорировались, либо ждали своих экспериментальных уточнений. Однако эти уточнения, вместо того, чтобы подтвердить торжество классической теории, неожиданно породили релятивистскую механику, которая перевернула представления о пространстве и времени и значительно ограничила сферу господства классических воззрений.

Второй сокрушительный удар по классической механике был нанесен в первой половине XX века возникновением квантовой механики, еще больше урезавшей область применения механики Ньютона. В 1924 году Луи Виктор Пьер Раймон, 7-й герцог Брольи (Луи де Бройль), высказал идею о двойственной природе микрочастиц – корпускулярно-волновом дуализме, которая принципиально изменила представления об облике микромира. Эйнштейн в письме к Борну, рекомендуя ему прочитать статью де Бройля «Исследования по квантовой теории», писал: «Прочтите ее! Хотя и кажется, что ее писал сумасшедший, написана она солидно». Несмотря на свою экстравагантность, идея двойственной природы микрочастиц получила экспериментальное подтверждение. Деваться было некуда, и волновые свойства микрочастиц пришлось признать. Для их объяснения было введено описание микрочастиц с помощью векторов состояния, подчиняющихся принципу суперпозиции, и введена их статистическая (вероятностная) интерпертация. Таким образом удалось формально избежать противоречия между представлениями микрообъекта как частицы и как волны, и построить стройную квантовую теорию микромира.

Однако парадоксальная двойственность природы микрочастиц вызывает определенные опасения, что мы еще не совсем понимаем физическую сущность этой двойственности, хотя с формальной стороны у нас проблем нет.

Знаменитый средневековый философ Уильям Оккам ввел в научный обиход весьма полезную вещь, получившую название «бритвы Оккама». Она представляет собой научный прицип, который можно выразить так: «Не следует умножать сущности сверх необходимого». Другими словами, Природа всегда предельно экономна при построении нашего мира. Однако в нашем случае мы видим ее странное расточительство – микрочастицам была дарована двойственность. Но есть ли в этом необходимость? Еще можно понять орбитальный электрон – ему волновые свойства безусловно необходимы для того, чтобы он при обращении вокруг ядра не терял энергию. Но такой необходимости нет, например, для нейтрона в атомном ядре. Между тем он тоже получил свою порцию волновых свойств. Зачем? Почему Природа не сохраниля простые и очевидные принципы классической механики для частиц, а так запутала их свойства?

К принципу Оккама можно подойти с другой стороны и обобщить следующим образом: «*Природа предельно экономна, и любое явление она всегда строит наиболее простым из всех возможных способов. Если же нам кажется, что то или иное явление могло бы быть проще, чем оно реализовано в Природе, это значит только одно – мы просто еще не обнаружили причину, которая делает наш вариант невозможным*».

Эйнштейн на одном из семинаров в Принстоне как-то заметил: «Господь Бог изощрен, но не злонамерен». Это дает нам надежду все-таки отыскать причину, почему такую простую и удобную теорию, как классическая механика, невозможно применять во всех случаях жизни.

Де Бройль, обнаруживший волновые свойства частиц, выдвинул идею, что этими свойствами обладают все микрочастицы, обладающие ненулевым импульсом. Другими словами, волновыми свойствами каждая частица обладает независимо от своих индивидуальных характеристик, и с другой стороны, волновые свойства частиц неизбежно проявляются при их движении (наличии ненулевого импульса).

Таким образом, мы приходим к идее, что волновые свойства совершенно необходимы частицам при их движении. Их всеобщность для всех частиц подводит к тому, что они связаны с самой природой движения. Почему? И здесь стоит вспомнить о парадоксе Зенона, который выявил противоречие в самой сущности классических представлений о движении.

Важность выполненного Д. Гильбертом в фундаментальной работе «*Основания математики*»[1] анализа парадокса Зенона и использование этого парадокса для исследования механического движения осталась, к сожалению, не оцененной в полной мере. В то же время дальнейшее развитие намеченного Гильбертом подхода приводит к более глубокому пониманию природы самого движения.

II. Парадокс Зенона и попытки его опровержения

Рассмотрим парадокс Зенона в форме апории об Ахиллесе и черепахе. Сформулируем его в виде **утверждения Z**:

“Ахиллес и черепаха бегут по прямой беговой дорожке. Ахиллес догоняет черепаху с конечной скоростью, поэтому для перемещения в позицию, которую занимала убегающая черепаха, ему требуется ненулевой промежуток времени Δt. Но за этот промежуток времени Δt движущаяся черепаха неизбежно сдвинется на ненулевой интервал пути s_i, и займет новую позицию, и т.д. Упомянутый промежуток времени Δt (и, соответственно, интервал между Ахиллесом и черепахой s_i) будет равен нулю в единственном случае - при бесконечно большой скорости Ахиллеса. Но это невозможно. Поэтому s_i (расстояние между бегущим Ахиллесом и ползущей черепахой) всегда будет ненулевым, даже если скорость Ахиллеса значительно больше скорости черепахи.

Это утверждение предлагает совершенно естественное разбиение движения на интервалы в рамках классических представлений о движении и работает независимо от значений скоростей Ахиллеса и черепахи или величины интервала на каждом этапе движения, даже если эти интервалы становятся сколь угодно малыми. Парадокс Зенона можно считать первым в истории цивилизации строгим доказательством определенного утверждения. Данное доказательство удивительно красиво и просто, и при этом и логически, и физически абсолютно безукоризнено (в рамках классических представлений о движении).

Утверждение Z базируется на классических представлениях о механическом движении: возможности точной локализации положения объектов во времени и пространстве, понятии пространственных и временных интервалов, их аддитивности, понятии скорости движения, и четко определенного взаимно-однозначного соответствия этих параметров. При конечном числе шагов оно легко подтверждается экспериментально. Следовательно, оно является неотъемлемой частью классической механики.

Однако, несмотря на парадокс Зенона, окружающий мир полон движения. В результате порождается сильнейшая иллюзия того, что “опровержение” парадокса Зенона очень просто и находится где-то совсем рядом. Только оно всегда почему-то всегда обманывает ожидания и ускользает от исследователей вот уже более 2,5 тысяч лет, несмотря на то, что им занимались практически все великие физики и математики, не говоря уже о бесчисленных рассуждениях на эту тему у писателей и поэтов[1,2,3,4,5,6,7].

Многочисленные “опровержения” парадокса (если не считать манипуляций с терминологией), в основном сводились к тому, что сходящаяся бесконечная последовательность уменьшающихся временных и пространственных интервалов образует в сумме конечную величину. Однако все эти рассуждения не смогли показать, что в результате расстояние между Ахиллесом и черепахой сократится в точности до нуля, что является совершенно необходимым. И тем более они не приводили к доказательству возможности того, что Ахиллес *обгонит* черепаху. Крупнейший математик XX века Д. Гильберт после тщательного анализа проблематики парадокса Зенона в фундаментальной монографии “Основания математики”[1] отмечал: “Обычно этот парадокс пытаются обойти рассуждением о том, что сумма бесконечного числа этих временных интервалов все-таки сходится, и таким образом дает конечный промежуток времени. Однако эти рассуждения абсолютно не затрагивают один существенно парадоксальный момент, а именно парадокс, заключающийся в том, что некоторая бесконечная последовательность следующих друг за другом событий, завершаемость которой мы не можем себе даже представить (не только фактически, но хотя бы в принципе), на самом деле все-таки должна завершиться”.

Р. Курант и Г. Роббинс в монографии[5] отметили, что для разрешения парадокса Зенона необходимо существенно углубить наше понимание физического движения. Морис Клайн, не видя убедительного разрешения парадокса Зенона, отметил проблемы с познаваемостью движения в классической механике[6].

Особенностью всех “опровержений” парадокса является то, что они никак не могут поколебать его базу – утверждение Z, затрагивая лишь его следствия, и, таким образом, утрачивают доказательную силу.

Типичная схема ложного “опровержения” парадокса:

a) вводится утверждение F: “Чтобы Ахиллес догнал черепаху, он должен сделать бесконечное число шагов за конечное время”;

b) полагается, что утверждение F является следствием утверждения Z

c) далее тем или иным способом опровергается утверждение F;

d) поскольку утверждение F опровергнуто, считается, что и утверждение Z также опровергнуто.

Хорошо видно, что происходит подмена понятий: истинное утверждение Z подменяется ложным утверждением F. Но утверждение F никак не следует из утверждения Z, поскольку утверждение Z описывает реальный физический процесс и в силу этого не может содержать бесконечности, а утверждение F такие бесконечности содержит. Авторы таких “опровержений” сами создают новое ложное утверждение F, которое затем с успехом “опровергают”.

По своей сути утверждение F пердставляет собой подмену интервалов $s_i \neq 0$ их пределом $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = 0$. Такая подмена очень популярна при попытках опровергнуть парадокс Зенона. При этом ссылаются на возможность применения к данной ситуации исчисления бесконечно малых величин и их пределов. Но в данном случае это неверно. Допустим, нам нужно вычислить некоторую физическую величину путем взятия интеграла. Когда мы выполняем операцию взятия интеграла, то заменяем сумму бесконечно малых подынтегральных выражений их пределом. И в результате получаем конечную искомую величину (если интеграл сходится). Ключевая особенность этой операции заключается в том, что мы выполняем *математическую* операцию, используя при этом бесконечности, и в результате получаем конечную *физическую* величину, которая таких бесконечностей уже не содержит. Операция взятия интеграла никак не связана с физическими процессами, представляет собой определленную математическую абстакцию и поэтому использование в ней бесконечностей допустимо.

В ситуации с парадоксом Зенона использование бесконечностей недопустимо, так как сближение Зенона и черепахи уже является физическим (а не математическим) процессом. Проиллюстрируем эту ситуацию следующим *иллюстративным примером* 1. Допустим вполне возможную ситуацию, в которой некий солидный банк установил вознаграждение Аххиллесу за то, что он догонит черепаху (кроме того, что он в результате получит вкусный черепаховый суп). Сумма вознаграждения будет определяться в зависимости от числа шагов Ахиллеса *i*, которые рассчитываются согласно утверждению Z. Возникает вопрос – получит ли Ахиллес вознаграждение и окажется ли при этом банк банкротом? Действиельно, чтобы получить деньги, Ахиллес должен представить в Банк счет с точным расчетом требуемой суммы. Если принять утверждение F, то при расчете будет использована замена s_i пределом $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = 0$. Другими словами, Ахиллес вместо точного расчета требуемых сумм представит в банк их предел! Вряд ли найдется банк, который согласится оплатить такой счет.

В этом примере хорошо видна абсурдность замены интервалов s_n их пределом $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = 0$, и, соответственно ложность утверждения F.

В итоге можно сказать следующее. Если последовательность Зенона Z = $\{s_i\}$ рассматривать как *математический формализм*, дающий один из способов заполнения заданного интервала бесконечной последовательностью сколь угодно малых интервалов s_i (подобно тому, как интегрирование есть процесс суммирования бесконечно большого числа бесконечно малых интервалов), то парадокс Зенона не возникает. В этом случае индекс i = 1,2,3,…

Если же мы рассматриваем последовательность Зенона как описание *физического процесса*, то расстояние между Ахиллесом и черепахой s_i есть величина измеряемая, т.е. физическая, для любого момента времени. Соответственно текущее значение индекса i становится реально измеримой (физической) величиной. Как физическая величина, она уже не может принимать бесконечно большое значение, а связанная с ней величина интервала s_i между бегущими Ахиллесом и черепахой в связи с этим не может быть равной нулю (как это отметил Дэвид Гильберт[1]). В этой ситуации диапазон изменения индекса $i = 1,2,3,\ldots,n$; $n \neq \infty$.

Иногда высказывают утверждение, что последовательность Зенона является «плохой» последовательностью, и применять ее нельзя. Но последовательность интервалов движения не может быть плохой или хорошей. Она может быть только *правильной* или *ошибочной*. Последовательность Зенона является *естественной*, так как Ахиллес в своем движении *неизбежно* будет проходить позиции, которые занимала черепаха в своем движении. Интервалы движения Ахиллеса связаны с интервалами движения черепахи *правильным* соотношением, и они точно соответствуют физической реальности при $i = 1,2,3,\ldots,n$; $n \neq \infty$. Это легко проверить на практике.

Допустим, что парадокс Зенона неверен. Тогда в конце движения должен существовать хотя бы один интервал, на котором Ахиллес во время бега не пробегал бы точки, которые занимала ранее черепаха. Но поскольку по условию они бегут по одной прямой, это невозможно. Поэтому парадокс Зенона выполняется в любом случае, независимо от способа разбиения их пути на участки. Другими словами, не существует завершающего участка в конце движения (определяемого законами классической механики), на котором Ахиллес и черепаха дружно бы «перескочили» в одну и ту же точку встречи, минуя логику Зенона. И никакими математическими ухищрениями этот факт опровергнуть невозможно. Этот вывод верен с точностью до аддитивности интервалов движения (под аддитивностью понимается возможность разложения любого участка движения на сумму интервалов движения).

Следует отметить, что Дэвид Гильберт в своем анализе парадокса Зенона не подвергал сомнению правильность выбора последовательности Зенона при анализе рассматриваемого движения.

Итак, к настоящему времени удовлетворительного опровержения парадокса Зенона в рамках классической механики не найдено. Поскольку за две с половиной тысячи лет в апориях Зенона ошибок не удалось обнаружить, остается полагать, что они отражают некие фундаментальные проблемы в самом понятии движения в классической механике. Классическая механика наиболее полно отвечает нашему чувственному восприятию окружающего мира. Вместе с тем вопреки порождаемому ею парадоксу Зенона в наблюдаемом мире непрерывное механическое движение все-таки существует. Это хорошо отражено в студенческом анекдоте: «Ахиллес был учеником Зенона и твердо знал, что стрела никогда не достигает своей цели. Это и подвело его во время Троянской войны».

Существование парадокса Зенона неизбежно приводит к вопросу, который поставил Д. Гильберт[1]: *действительно ли мы располагаем доказательством непротиворечивости теории движения*? В основе классической механики лежит постулат “Механическое движение возможно”. Этот постулат был принят без доказательства, так как окружающий мир полон реальным движением физических тел, что создавало ощущение его непротиворечивости. В то же время из этого постулата средствами классической механики можно строго вывести два прямо противоположных, но при этом истинных утверждения:

1. [Постулат “Механическое движение возможно”] →[Скорость Ахиллеса v_A больше скорости черепахи v_T, т.е. $v_A > v_T$] →[следовательно, Ахиллес догонит черепаху за время $t_g = s_1/(v_A - v_T)$];
2. [Постулат “Механическое движение возможно”]→[утверждение Z, $s_i \neq 0$] →[следовательно, Ахиллес никогда не догонит черепаху].

Поскольку из данного постулата выводится противоречие, то нельзя говорить о его непротиворечивости в рамках рассматриваемой теории[8].

III. Решение парадокса Зенона и возникновение сингулярности

Реальное решение парадокса Зенона заключается не в попытке его “опровержения”, а в четком определении области его применимости, за пределами которой он теряет силу. Именно ограниченность области его применения и открывает возможность для реального движения физических тел в окружающем нас мире. Д. Гильберт[1] отметил, что “радикальное решение парадокса” связано с тем, что при неограниченном дроблении движения возникает нечто такое, что едва ли может быть охарактеризовано как движение, подобно тому, как при неограниченном дроблении воды мы получим нечто, что уже не может быть охарактеризовано как вода. Имеется в виду движение в классическом его понимании.

Рассмотрим определение движения в рамках классической механики (для упрощения будем рассматривать одномерное движение).

Определение 1. *Под механическим движением материальной частицы понимается такое изменение ее положения в пространстве, при котором участок движения S между начальной $x_0(t_0)$ и конечной $x_k(t_k)$ точками может быть разбит на совокупность смежных интервалов движения s_i, и за интервал времени $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ частица изменяет свое пространственное положение на величину интервала движения $s_i = \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.*

Под смежными мы будем понимать интервалы, граничные точки которых представляют собой конец и начало соседних интервалов, либо начальную или конечную точки движения соответственно. В предельном переходе интервалы Δx_i и Δt_i переходят в соответствующие дифференциалы dx и dt.

Отметим неотъемлемые особенности движения, непосредственно вытекающие из данного определения.

I. Аддитивность интервалов движения. Из определения 1 следует, что участок движения S от точки $x_0(t_0)$ до конечной точки $x_k(t_k)$ может быть представлен в следующем виде (условие аддитивности):

$$S = x_k(t_k) - x_0(t_0) = \sum_{i=1}^{\kappa} s_i \,. \tag{1}$$

II. Свойство аддитивности движения позволяет точно определить положение (координату) x_m частицы в процессе ее движения:

$$x_m = x_0 + \sum_{i=1}^{m} s_i \,. \tag{2}$$

Вследствие свойства аддитивности движение может быть представлено упорядоченной последовательностью фиксированных положений частицы в пространстве $x_0, x_1, x_2, \ldots x_i, x_{i+1} \ldots\ x_k$, соотнесенной с упорядоченной последовательностью ее положений во времени t_0, $t_1, t_2, \ldots\ t_i$, $t_{i+1} \ldots\ t_k$. При бесконечном увеличении числа промежуточных точек эта последовательность переходит, в общем случае, в непрерывную линию – траекторию движения.

В рамках классической механики имеют место следующие свойства движения:

1. Если два свободно движущихся физических тела (материальные частицы) не испытывают между собой взаимодействий, то до момента столкновения их движение никак не зависит друг от друга.
2. Движение физических тел (частиц) никак не зависит от наблюдателя, регистрирующего такое движение.
3. Из свойства 2 следует, что движение физических тел (частиц) никак не зависит от того, каким способом наблюдатель разбивает аддитивное движение на смежные интервалы s_i при регистрации их движения. Т.е. разбиение на интервалы s_i может быть произвольным.

Рассмотрим теперь с позиций классической механики парадокс Зенона в форме апории об Ахиллесе и черепахе. Допустим, что в системе отсчета K из начальной точки $x_0(t_0=0) = 0$ прямолинейно движется свободная точечная материальная частица α_A (Ахиллес) с постоянной скоростью v_A. Из точки x_1, отстоящей от начала координат на расстоянии $s_1 = x_1 - x_0$, в момент $t_0=0$ начинает движение точечная частица α_T (черепаха) с постоянной скоростью v_T. Движение обоих частиц осуществляется в лабораторной системе отсчета K по прямой OX в одном и том же направлении. Пусть теперь наблюдатель в системе отсчета K будет регистрировать положения обоих частиц в процессе их непрерывного движения. Из свойств 2 и 3 следует, что это никак не скажется на движении этих частиц.

Положим, что наблюдатель выбрал следующий способ разбиения движения на интервалы. Когда в процессе движения α_A окажется в положении x_1, наблюдатель отмечает соответствующий момент времени как t_1 и положение частицы α_T как x_2. Далее аналогично: при прохождении частицей α_A точки x_i он отмечает соответствующий момент времени как t_i, а положение частицы α_T как x_{i+1}. Возможность такого разбиения на интервалы открывается перед наблюдателем вследствие аддитивности движения и свойства 3.

При выполнении соотношения (1) можно записать рекуррентную формулу для вычисления расстояния между частицами. Для этого учтем, что частица α_A преодолевает расстояние s_i к положению x_i за тот же период времени (t_i - t_{i-1}), за который медленная частица α_T удаляется от этого положения на расстояние s_{i+1}. Расстояние $s_{i+1} = v_T(t_{i+1} - t_i)$. Но с другой стороны $(t_{i+1} - t_i) = s_i/v_A$. Здесь $v_T > 0$ и $v_A > 0$ – скорости частиц α_T и α_A соответственно. Отсюда следует:

$$s_{i+1} = \frac{v_T}{v_A} s_i. \tag{3}$$

В итоге с учетом аддитивности интервалов (1) парадокс Зенона может быть выражен следующим образом:

$$\begin{cases} S = \sum_{i=1}^{n} s_i, \\ s_{i+1} = \frac{v_T}{v_A} s_i. \end{cases} \tag{4}$$

Построенная в соответствии с соотношениями (4) последовательность Зенона Z = $\{s_1, s_2, \dots s_i, \dots s_n\}$ обладает интересными и удобными свойствами. Интералы движения s_i Ахиллеса в то же время являются интервалами движения черепахи (за исключением начального и конечного интервалов s_1 и s_{n+1}). И они же являются расстоянием между Ахиллесом и черепахой. Таким образом, последовательность Зенона позволяет компактно отобразить связь движений Ахиллеса и черепахи и расстояний между ними в процессе движения.

Рассмотрим случай $v_A < v_T$ (фиг. 1a). На графике по вертикали отображено время, по горизонтали – пройденный бегунами путь. Линии движения Ахиллеса и черепахи расходятся, встречи не происходит. Стрелками показано формирование последовательности точек A_i, порождающей последовательность Зенона. Уменьшая начальный интервал s_1, можно добиться сколь угодно плотного заполнения точками A_i линии движения. При этом все точки A_i остаются *регулярными*.

Пусть теперь $v_A = v_T$ (фиг. 1b). Линии движения Ахиллеса и черепахи параллельны, встречи не происходит. При этом все точки A_i остаются *регулярными*.

Рассмотрим случай $v_A > v_T$ (фиг.1c). Линии движения Ахиллеса и черепахи сходятся в точке C, но встречи все-равно не происходит! В точке C возникает *сингуляность*, исключающая встречу бегунов. При этом сингулярность сохраняется независимо от того, насколько плотно мы будем заполнять участок OC точками A_i. Покажем это.

Для того, чтобы быстрая частица α_A догнала медленную частицу α_T, расстояние s_{i+1} между ними должно сократиться в точности до нуля. Однако, как видно из (3), при $s_1 > 0$, $v_T \neq 0$ и $v_A \neq \infty$, значение s_{i+1} никогда не будет нулевым, независимо от величины i и соотношения скоростей v_T и v_A. Следовательно, даже если $v_A > v_T$, частица α_A никогда не догонит частицу α_T. Частица α_A оказывается отделенной своеобразным непреодолимым барьером s_i от частицы α_T.

Анализ механизма формирования парадокса позволяет следующие выводы.

Утверждение 1: *если непрерывное движение может быть разбито на упорядоченную аддитивную последовательность смежных интервалов движения* s_i, $i = 0,1,2…$, *таких, что они могут быть связаны соотношением вида (3), то мы неизбежно придем к парадоксу Зенона*.

Это прямо следует из соотношений (4). Действительно, если движение *непрерывно* и *аддитивно*, оно в силу свойств 1 – 3 допускает построение сходящегося ряда интервалов движения, в том числе с общим членом вида (3). В свою очередь соотношение (3) базируется на аддитивности движения (1). Возможность формирования такого ряда является критичным для логики Зенона.

Итак, аддитивность непрерывного движения в классической механике лежит в основе возникновения парадокса Зенона. Отметим в связи с этим, что аддитивность движения является необходимым общим свойством апорий Зенона («Ахиллес и черепаха», «Дихотомия», «Стрела»), непосредственно следующим из положений классической механики.

Утверждение 2. *Непрерывное механическое движение в рамках классической механики невозможно.*

Будем рассматривать α_T как вспомогательную частицу, введенную наблюдателем для исследования движения частицы α_A. Нетрудно видеть, что любая точка, удаленная от начала системы отсчета K на фиксированное расстояние $R \geq v_A s_1/(v_A - v_T)$, оказывается недостижимой для частицы α_A. Соответственно, область пространства, лежащая вне сферы радиусом R вокруг точки начала движения, недостижима для частицы α_A. Уменьшая скорость вспомогательной частицы v_T и расстояние s_1, можно эту сферу стянуть к точке x_0 и за счет этого практически полностью обездвижить частицу α_A.

Значит, введение вспомогательной частицы и использование описанного выше способа разбиения движения на интервалы серьезно влияет на движение частицы α_A, вплоть до полной остановки ее движения. Но это прямо противоречит неотъемлемым свойствам движения в классической механике 1-3. Противоречие снимается только в том случае, если движение отсутствует, что и доказывает Утверждение 2.

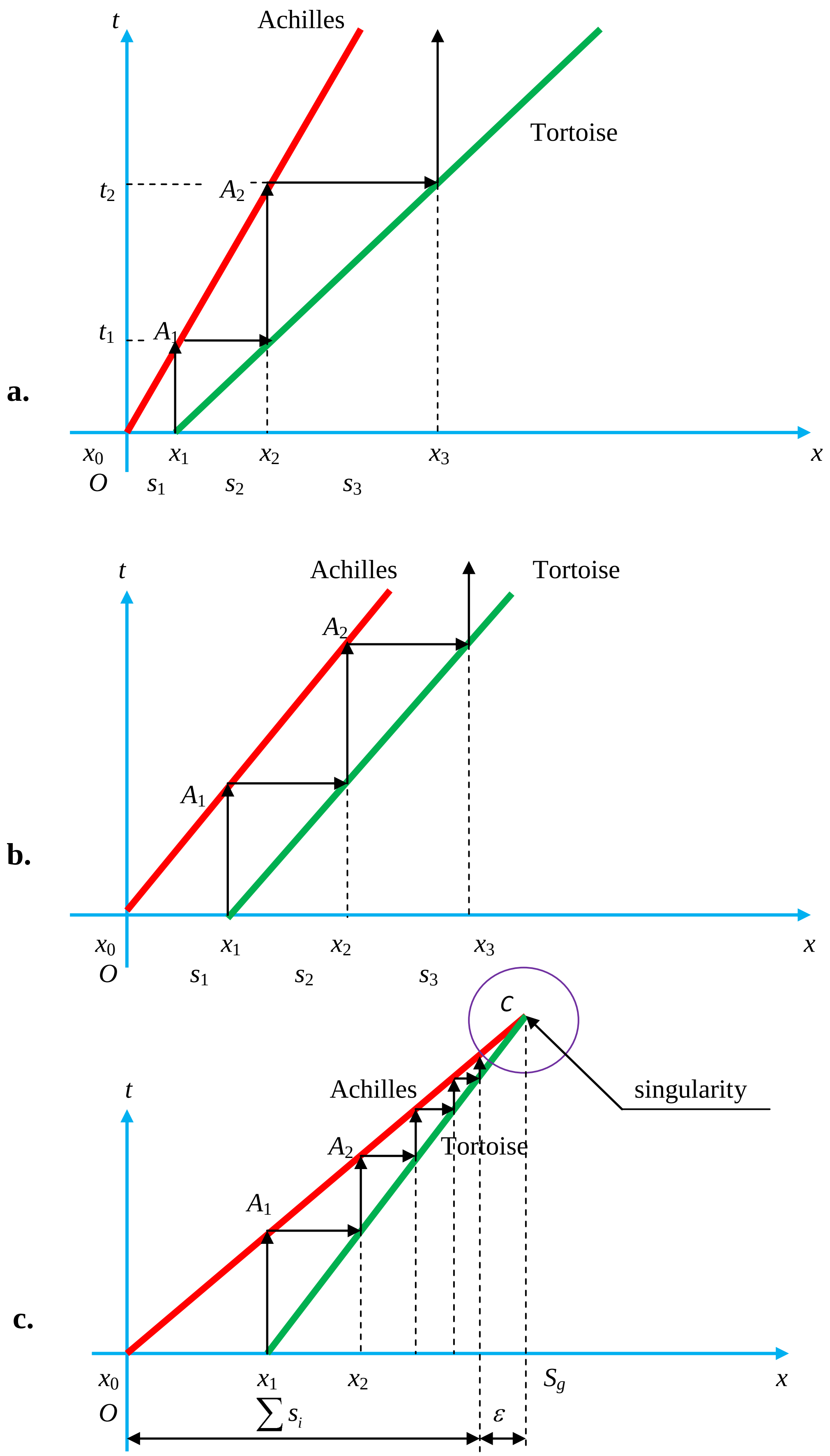

Fig.1. **a)** Ленивый Ахиллес, $v_A < v_T$. **b)** Спокойный Ахиллес, $v_A = v_T$. **c)** Быстрый Ахиллес, $v_A > v_T$. В точке C возникает сингулярность!

Утверждение 3. *Вокруг точки пересечения линий движения Ахиллеса и черепахи С существует окрестность ε такая, что интервалы s_i между точками A_i, лежащими внутри этой окресности, не образуют последовательность Зенона*.

Действительно, участок пути S_g, соответствующий линии *ОС* на фиг. 1*c* можно записать в следующем виде:

$$S_g = \sum_{i=1}^{\kappa} s_i + \varepsilon. \qquad (5)$$

Но интервал ε не может быть разложен в виде последовательности Зенона, так как он обязательно должен содержать нулевой член, отражаюший соединение частиц α_A и α_T в точке *С*. А последовательность Зенона в силу соотношения (3) нулевых членов содержать не может. Таким образом, в окрестности ε соотношения (4) выполняться не могут. Поскольку построение интервалов согласно выражению (3) проблем не представляет, остается признать, что в окрестности ε не выполняется первое условие – аддитивность движения (1). Отсюда вытекает важное следствие.

Следствие. *Любой интервал движения включет участок, движение на котором неаддитивно, и таким образом, не может быть описано в рамках классической механики*.

Важно отметить следующий факт. В классическом представлении расстояние S_g, на котором Ахиллес догонит черепаху, рассчитывается просто: $S_g = v_A t_g$. Здесь $t_g = s_1/(v_A - v_T)$. Однако для рассчета величины S_g учитываются положение только двух точек на линии движения: начальной *О* и конечной *С*. Такая схема рассчета «видит» саму точку *С* и «не видит», что происходит в ее окрестностях. При рассчете S_g по формуле (5) используется последовательность Зенона, которая учитывает взаимные движения сближающихся Ахиллеса и черепахи и «видит» возникающую скрытую сигнулярность в точке *С*. В этом основное значение последовательности Зенона для понимания природы механического движения.

Можно считать, что реальность существования участка ε подтверждается экспериментально. Действительно, рассчитать положение движущейся частицы по классической формуле $S_g = v_A t_g$ со сколь угодно большой точностью невозможно в силу принципа неопределенности Гейзенберга, хорошо подтвержденного на практике.

VI. Связь возможности механического движения частиц с наличием у них свойств корпускулярно-волнового дуализма

Чтобы в реальности один объект в процессе движения догнал другой объект, нужно, чтобы логика Зенона на определенном этапе перестала работать. Т.е. произошло обрушение классических представлений о движении. Для этого требуется физический механизм вне рамок классической (и релятивистской) механики, лишающий движение свойства аддитивности. И такой механизм известен – это проявление волновых свойств физических объектов, описываемых аппаратом квантовой механики[9,10].

Рассмотрим случай одномерного движения частиц вдоль оси *OX*. Пусть s_i представляет собой член сходящегося ряда интервалов движения, который может принимать сколь угодно малые, но не нулевые значения. Это может быть расстояние между сближающимися частицами α_A и α_T (апория об Ахиллесе и черепахе), или интервал между частицей α_A и сколь угодно близкой, но не совпадающей с ней точкой в апории “Дихотомия”. В рамках классической механики по Зенону этот интервал непреодолимый.

Теперь выйдем за рамки классической механики, и будем рассматривать частицу α_A как квантовомеханическую, т.е. обладающую волновыми свойствами, и ей в момент t можно сопоставить волновой пакет шириной L. Нас будет интересовать наблюдаемая *X*, которая может принимать значение x_1, т.е. частица будет находиться в состоянии $|x_1>$, или значение x_2, т.е. частица будет находиться в состоянии $|x_2>$. Будем полагать, что частица в этих состояниях занимает положение в начальной части волнового пакета или в его конечной части соответственно, при этом $L> \Delta x = x_2 - x_1$.

Пусть теперь интервал s_i уменьшился настолько, что в момент t оказался внутри волнового пакета между точками x_1 и x_2, и $s_i < \Delta x < L$. В соответствии с принципом квантовой суперпозиции частица может находиться в состоянии $|\psi> = c_1|x_1> + c_2|x_2>$, где c_1 и c_2 – коэффициенты. Т.е. в этом случае частица находится сразу в двух квантовых состояниях $|x_1>$ и $|x_2>$. Другими словами, в состоянии суперпозиции частица одновременно находиться в точках, лежащих с обоих сторон интервала s_i. В этой ситуации говорить о непреодолимости интервала s_i уже не имеет смысла, он утрачивает свойство барьера и процесс движения разблокируется. Ситуация аналогична эффекту квантового туннелирования, при котором частица проникает через барьер.

Невозможность локализовать движущуюся частицу в рамках волнового пакета приводит к невозможности построения аддитивного ряда интервалов ее движения. В связи с этим можно говорить о принципе неаддитивности движения в квантовой механике. Трактовка этого свойства как особого принципа объясняется его фундаментальными последствиями – благодаря этому принципу открывается возможность для механического движения любых физических тел. Неаддитивность движения является критичным для логики Зенона, так как в этом случае запрещается формирование любых сходящихся рядов, и в результате снимается парадоксальность и противоречивость механического движения.

Теперь можно более детально рассмотреть движение сближающихся тел в апории об Ахиллесе и черепахи. Утверждение Z справедливо только тогда, когда выполняется аддитивность интервалов движения. Полагая сближение Ахиллеса и черепахи непрерывным, интервал движения можно условно разбить на 2 участка – макроучасток и микроучасток (окрестность ε). На первом движение аддитивно (и выполняется утверждение Z), и на втором – при движении уже в микромасштабах между сближающимися объектами, оно утрачивает свойство аддитивности и утверждение Z не выполняется. В такой схеме на втором участке бесконечно малый ненулевой интервал s_i – барьер между Ахиллесом и черепахой утрачивается, парадокс Зенона выходит за пределы своей применимости и уже не блокирует движение. Используя соотношение $s_{i+1} = s_1(v_T/v_A)^i$, можно оценить границы, за пределами которых утверждение Z неприменимо, следующим образом:

$$n > \log_k \frac{l_p}{s_1},\ k = v_T/v_A. \qquad (6)$$

Здесь s_1 – исходное расстояние между Ахиллесом и черепахой, l_p – планковская длина. Это соотношение означает, что как минимум на n-ом шаге расстояние между сближающимися телами станет меньше планковской длины, законы классической механики и утверждение Зенона будут гарантированно неприменимы, так как аддитивность интервалов движения будет утрачена. На микроучастке (окрестности ε) действуют закономерности квантовой механики. Заметим, что классическая механика представляет собой предельный случай квантовой механики (в силу принципа соответствия). В результате объединения {классическая механика+квантовая механика} постулат движения становится непротиворечивым (по крайней мере в отношении рассматриваемой проблемы).

Иногда возникает иллюзия, что любой школьник сможет абсолютно точно рассчитать время, которое потребуется Ахиллесу для того, чтобы Ахиллес догнал черепаху. Но для того, чтобы точно указать момент их встречи, нужно точно знать скорости и положения движущихся объектов, причем одновременно. А это невозможно в силу принципа неопределенности Гейзенберга. По своей физической сути парадокс Зенона подводит нас к этому фундаментальному в квантовой механике принципу. Школьник может рассчитать момент встречи только с определенной степенью точности, которая соответствует принципу неопределенности Гейзенберга, и никогда не получит результат с абсолютной точностью.

VII. Выводы

В заключение можно прийти к следующим общим выводам.

1.Утверждение Z можно выразить с помощью уравнений (4).

2.Утверждение Z, записанное в виде уравнений (4), точно описывает процесс движения при конечном значении числа шагов n. В этом можно удостовериться прямой подстановкой параметров движения.

3.В реальности s_i достигнет нулевого значения при любых значениях скоростей $v_T < v_A$.

4.Но из (4) следует, что $s_i = 0$ только в следующих случаях:

a. Скорость Ахиллеса $v_A = \infty$. Но это невозможно, так как содержит бесконечность.

b.Число шагов $n = \infty$ (утверждение F). Тогда $\lim_{i\to\infty} s_i = 0$. Производится подмена значения s_i, получаемого из формулы (3), величиной $\lim_{i\to\infty} s_i = 0$. Но это невозможно, так как содержит бесконечность.

c.Утверждение Z применимо только к части интервала движения. Тогда число шагов n конечно (соответствует неравенству (6)), а значение $s_i = 0$ реализуется за пределами области применения утверждение Z.

5.Пункты 4a и 4b содержат бесконечности, и поэтому физически нереализуемы. Следовательно, в реальности реализуется оставшийся пункт 4c, не содержащий бесконечностей.

Парадокс Зенона неразрешим в любой механике, движение в которой аддитивно. Решение заключается в том, что утверждение Z может быть применено только к части интервала движения, в которой движение аддитивно, а для преодоления оставшейся неаддитивной части интервала необходимы средства, выходящие за пределы классической механики. Эти средства дает квантовая механика. Таким способом снимается проблема бесконечности, однако неизбежно следует вывод: любой интервал механического движения неизбежно включает в себя микроучасток, движение на котором не может быть описано средствами классической механики. Или, другими словами, невозможно построить интервал движения, котороый бы полностью описывался исключительно средствами классической механики. Здесь следует принять во внимание, что классическую механику можно рассматривать предельный случай квантовой механики[9].

Фундаментальное для любой механики понятие движения представляет собой в конечном итоге квантовомеханическое явление, возникающего как проявление неаддитивности интервалов движения и которому подвержены физические объекты любых масштабов. Т.о. способностью к движению наш мир обязан волновым свойствам физических тел. Исключив эти свойства, мы получим мертвый «мир Парменида» – мир без движения.

Последовательность Зенона по сути является удачным инструментом для выявления скрытых особенностей физики механического движения, связывающих классическую механику с квантовой.

Догадка Луи де Бройля о том, что поток движущихся частиц должен обладать волновыми свойствами, хорошо согласуется с изложенным в данной работе подходом:

движение возможно только как результат присутствия у движущихся частиц волновых свойств. Если лишить их этих свойств, то поток частиц не сдвинется с места.

Идея де Бройля об универсальности волнового характера движения частиц хорошо объясняется тем, что эти свойства связаны с самим феноменом движения, т.е. их проявление не связано с индивидуальными свойствами самих частиц. Этим и объясняется такая универсальность.

Можно сказать, что волновые свойства тел проявляются в макромире наиболее явно в виде появления возможности их механического движения.

Описанные в данной работе особенности движения неизбежно приводят к тому, что корпускулярно-волновой дуализм является необходимым свойством материальных частиц, составляющих физические тела. Без этого свойства существование физического мира в том виде, в котором мы его наблюдаем, невозможно. Классическая механика и квантовая механика прочно между собой связаны. Эта связь не формальная, а вполне реальная. Мы имеем большое число примеров, когда квановые явления микромира порождают хорошо наблюдаемые макроявления. В частности квантовое явление сверхтекучести можно свободно наблюдать невооруженным глазом. Кроме того, весь окружающий мир полон видимыми проявлениями квантовых свойств материи: мобильная связь, телевидение, компьютеры, и вообще вся электроника на кристаллах представляет собой реально ощущаемые проявления квантовых процессов, которые реализуются в кристаллах электронных микросхем.

Физический мир един, и не знает разделения на классическую механику, квантовую механику, релятивистскую механику и т.д. Такое разделение показывает всего лишь исторические этапы осознания человечеством отдельных частей всеобщих закономерностей природы. И все более глубокое осознание этих закономерностей единой природы приводит в конечном итоге к их сближению. Показанная в данной работе еще одна важная связь между ключевыми физическими теориями также способствует этому сближению.

В заключению хочу выразить благодарность доктору Левичу А. П. и всем принявшим участие в семинаре в Московском государственном университете по рассматриваемой тематике за ценные замечания в ходе обсуждения материалов данной статьи.

1. Д. Гильберт, П. Бернайс , *Основания математики*, М.: Наука, 1979.
2. Аристотель, *Физика,* М.: Мысль, 1976.
3. А.М. Анисов, Апории Зенона и проблема движения // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН / РАН. Ин-т философии, Обществ. ин-т логики, когнитологии и развития личности. — М.: 2000. — Вып. 14 / Редкол.: А. С. Карпенко (отв. ред.) и др. — Стр. 139—153.
4. Дж. Уитроу, Естественная философия времени, М.: УРСС, 2003.
5. Р. Курант, Г. Роббинс, Что такое математика, 3-е изд., М.: МЦНМО, 2001.
6. М. Клайн, Математика. Утрата определённости, М.: Мир, 1984.
7. P. Lynds. Time and Classical and Quantum Mechanics: Indeterminacy vs Discontinuity. Foundations of Physics Letters, **15**(3), (2003).
8. А. Д. Николенко, Физика сознания и жизни, космология и астрофизика, **1**, 2012.
9. Л.Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, М.: Наука, 1972.
10. Ю.Ф. Вилесов, Вестник МГУ, сер. 7 Философия, **6**, 20 (2002).