ПАРАДОКС ПРОГРАММЫ ГИЛЬБЕРТА И МЕТАМЕТАТЕОРИЯ, СВОБОДНАЯ ОТ ЭТОГО ПАРАДОКСА

Г.К. Мкртумян
ЗАО «Монолитстрой», г. Москва

В работе доказывается существование парадокса программы Гильберта и существование метазакона, на основании которого строится метаметатеория и ее интерпретация, свободные от этого парадокса. Доказывается существование многообразий, которые могут не быть классами. Доказывается существование материальных частиц и их внутреннего метрического пространства - времени. Доказывается реляционный принцип формирования пространства-времени.

Пусть задана противоречивость T_p теории T:

$$T_p \Leftrightarrow (T \vdash A) \wedge (T \vdash \neg A) = 1,\ \forall T(T \in \mathbf{T} \Leftrightarrow T_p) \cap \mathbf{T} \neq \varnothing. \qquad (1)$$

С другой стороны, непротиворечивость

$$\neg T_p \Leftrightarrow ((T \vdash A) \vee (T \vdash \neg A)) \wedge \neg ((T \vdash A) \wedge (T \vdash \neg A)). \qquad (2)$$

Беря отрицание второго высказывания, получим

$$T_p \Leftrightarrow \neg ((T \vdash A) \vee (T \vdash \neg A)) \vee ((T \vdash A) \wedge (T \vdash \neg A)). \qquad (3)$$

Сравнивая (1) и (3), получим

$$\neg ((T \vdash A) \vee (T \vdash \neg A)) \Leftrightarrow (T \vdash A) \wedge (T \vdash \neg A) = 0,$$
$$\forall T(T \in \mathbf{T} \Leftrightarrow T_p) \cap \mathbf{T} = \varnothing, \qquad (4)$$

что противоречит (1). Обобщенный парадокс программы Гильберта $\mathbf{L_0}$, имеющей целью спасти классическую математику от парадоксов с помощью доказательства ее непротиворечивости [1], получим, обобщая (1), (2), (3) по правилу $L_p \Leftrightarrow \forall T\,(T_p)$ и получая, заданную противоречивость системы логики $L_p \Leftrightarrow (L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A)$, $\forall L(L \in \mathbf{L_0} \Leftrightarrow L_p) \cap \mathbf{L_0} \neq \varnothing$, что противоречит обобщению (4) в виде $\forall L(L \in \mathbf{L_0} \Leftrightarrow L_p) \cap \mathbf{L_0} = \varnothing$.

Таким образом, возможность построения противоречивых теорий и систем логики с дальнейшим исключением их из науки, в связи с их негативной классификацией в программе Гильберта, делает эту программу противоречивой в целом. Действительно, даже из соображений здравого смысла независимо от каких-либо субъективных причин, если исходить из негативной классификации противоречий, то необходимо прийти к выводу, что только в противоречивой науке могут возникать противоречивые теории и системы логики. Этот общенаучный парадокс программы Гильберта требует анализа причин его возникновения и способов его устранения.

1. С.К. Клини. Математическая логика. М.: КомКнига, 2007.

Обращаясь к [2] как к первоисточнику европейского направления развития логики, находим, что роль понятия парадокс в традиционной логике прямо противоположна той негативной роли, которая отводится этому понятию в программе Гильберта. Более того, парадоксы в традиционной логике играют определяющую и порождающую роль в возникновении и исчезновении любых предметов природы: «Изменение по противоречию, происходящее из не-субстрата в субстрат, есть возникновение, … Изменение же из субстрата в не-субстрат есть уничтожение, … из этих изменений те, что относятся к возникновению и уничтожению, не суть движения (это именно изменения по противоречию), …» [2, стр. 295]. При этом определяются понятия противоречие, противоположное и промежуточное: « ... наибольшее различие ... я называю противоположностью ... каждая противоположность не может иметь больше одной противоположности ... противоположно то, от чего изменения исходят как от крайнего ... первичная противоположность – это обладание и лишенность ... противоречие означает именно такое противопоставление, в котором одна из обеих сторон присуща любой вещи, т.е. не имеет ничего промежуточного … у противоположностей может быть нечто промежуточное ... нечто возникает из противоположностей …» [2, стр. 260 - 266], где противоположное – это отрицание того, чему оно противоположно, а промежуточное - это именно то, что возникает или исчезает по противоречию.

Отсюда следует, что традиционную логику можно считать универсальной метаметатеорией, в которой противоречие - это конструктивное понятие, являющееся источником возможных возникновений или исчезновений предметов в классах неопределенной мощности, свободной от негативной классификации парадоксов, что освобождает ее от проблемы полноты. Другими словами, на примере традиционной логики можно сделать заключение о том, что исключение противоречий из универсальной метаметатеории невозможно в силу естественных причин, т.е. метаметатеория должна содержать противоречия и операции с ними.

Основываясь на этих логических выводах традиционной логики и на логическом законе исключенного третьего, можно сформулировать следующий метатеоретический закон: любая наука либо противоречива, либо непротиворечива:

$$L_p \vee \neg L_p.$$

Подставляя сюда обобщения формул (1), (2), получим:

$L_p \vee \neg L_p \Leftrightarrow ((L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A)) \vee (((L \vdash A) \vee (L \vdash \neg A)) \wedge \neg ((L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A))) \Leftrightarrow (L \vdash A) \vee (L \vdash \neg A) \Leftrightarrow (L \vdash A)\ \Upsilon\ (L \vdash \neg A)\ \Upsilon\ ((L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A))$,

---

2. Аристотель. Соч. в 4 т., т. 1, Метафизика. М.: Мысль, 1976.

где под символом Υ понимается разделительная дизъюнкция «или, но не оба вместе», т.е. имеет место метазакон

$$(L \vdash A) \Upsilon (L \vdash \neg A) \Upsilon ((L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A)), \qquad (5)$$

называемый метазаконом не исключенных возможностей, где приставка мета означает уровень закона, из которого следуют остальные законы, как, например, закон исключенного третьего, который следует из (5) при $\forall T(T \in \mathbf{T} \Leftrightarrow T_p) \cap \mathbf{T} = \varnothing$.

Теорема 1: существуют два класса M, N, называемые противоположными классами, $M \Leftrightarrow \neg N$, определяющими предикатами которых являются соответственно $F(x)$ и $\neg F(x)$, $M \Leftrightarrow \forall x(x \in M \Leftrightarrow F(x))$, $N \Leftrightarrow \forall x(x \in N \Leftrightarrow \neg F(x))$, где x пробегает множества.

Доказательство.

С одной стороны, из (5) следует существование двух классов $\forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A))$ и $\forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash \neg A))$ и при $\forall x(x \in M \Leftrightarrow F(x)) \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A))$, $\forall x(x \in N \Leftrightarrow \neg F(x)) \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash \neg A))$ следует существование двух классов $\forall x(x \in M \Leftrightarrow F(x)) \Upsilon \forall x(x \in N \Leftrightarrow \neg F(x))$.

С другой стороны, из существования предикатов $F(x)$, $\neg F(x)$ следует существование классов $\forall x(x \in M \Leftrightarrow F(x))$, $\forall x (x \in N \Leftrightarrow \neg F(x))$ и при $\forall x(x \in M \Leftrightarrow F(x)) \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A))$, $\forall x(x \in N \Leftrightarrow \neg F(x)) \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash \neg A))$ существование $\forall L(L \in \mathbf{L} = \mathbf{L_1} \cup \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A) \Upsilon (L \vdash \neg A))$ и $(L \vdash A) \Upsilon (L \vdash \neg A)$, а значит, существование закона (5).

Предметной интерпретацией данной теоремы является существование противоположных категорий в традиционной логике.

Следствие: Существует класс M_0, который сам себе противоположен, $M_0 \Leftrightarrow \neg M_0$, $M_0 \Leftrightarrow \forall x(x \in M_0 \Leftrightarrow (F_0(x) \vee \neg F_0(x)))$.

Это следует из теоремы 1 при $F(x) = F_0(x) \vee \neg F_0(x)$.

Учитывая определения возможного и невозможного в [2]: « ... каждое возникновение может быть и не быть, а эта возможность ...» (стр. 198), « ... бытием возможности обладает и то, чего нет, но не возникает то, бытие чего невозможно» (стр. 118), рассмотрим следующие следствия закона (5).

Теорема 2: существует многообразие $\Diamond x$, называемое многообразием возможностей x, $\Diamond x \Leftrightarrow \forall x(x \notin \Diamond x \wedge x \in \Diamond x \Leftrightarrow F(x) \wedge \neg F(x))$.

Доказательство.

С одной стороны, из (5) следует существование многообразия $\forall L(L \in \mathbf{L} \Leftrightarrow (L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A))$ и при $\forall x(x \in \Diamond x \Leftrightarrow F(x)) \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L} \Leftrightarrow (L \vdash A))$, $\forall x(x \notin \Diamond x \Leftrightarrow \neg F(x)) \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L} \Leftrightarrow (L \vdash \neg A))$ следует существование многообразия $\forall x(x \notin \Diamond x \wedge x \in \Diamond x \Leftrightarrow F(x) \wedge \neg F(x)) \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L} \Leftrightarrow (L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A))$.

С другой стороны, из существования предиката $F(x) \wedge \neg F(x)$ и при $x = (w, v)$, $\Diamond x = (u, r)$, $x \in \Diamond x \Leftrightarrow (w = u)$, $x \notin \Diamond x \Leftrightarrow (v \neq r)$, $(u, r) = \varnothing \Leftrightarrow (w \neq u) \wedge$

$(v \neq r)$, следует, что многообразие $\forall x(x \notin \Diamond x \wedge x \in \Diamond x \Leftrightarrow F(x) \wedge \neg F(x))$ не пусто и при $\forall x(x \in \Diamond x \Leftrightarrow F(x)) \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L} \Leftrightarrow (L \vdash A))$, $\forall x(x \notin \Diamond x \Leftrightarrow \neg F(x)) \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L} \Leftrightarrow (L \vdash \neg A))$ существует $\forall L(L \in \mathbf{L} \Leftrightarrow (L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A))$ и $(L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A)$, а значит, существует закон (5).

Такое многообразие может не быть классом, т.к. содержит противоречие $x \notin \Diamond x \wedge x \in \Diamond x$. Интерпретацией многообразия возможностей является в традиционной логике материя и в теоретической физике вакуум или темная материя, в котором возникновение частиц компенсируется их исчезновением, не регистрируемыми измерительными приборами, или квантовая частица $x = (w, v)$, где w – координата, а v – скорость частицы. На числовой оси интерпретацией многообразия возможностей являются так называемые «неизмеримые множества» [3], которые не могут быть ни множествами, т.к. содержат противоречие, ни классами, т.к. отношения между классами определяются как бинарные отношения ε, не содержащие противоречия [4].

Теорема 3: существует многообразие $\neg\Diamond x$, называемое многообразием невозможностей x, $\neg \Diamond x \Leftrightarrow \forall x(x \notin \neg \Diamond x \vee x \in \neg \Diamond x \Leftrightarrow F(x) \vee \neg F(x))$.

Доказательство.

С одной стороны, из (5) следует существование $(L \vdash A)\ \Upsilon\ (L \vdash \neg A)$ и двух классов $\forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A))$ и $\forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash \neg A))$ и при $\forall x(x \in \neg \Diamond x \Leftrightarrow F(x)) \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A))$, $\forall x(x \notin \neg \Diamond x \Leftrightarrow \neg F(x)) \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash \neg A))$ следует существование многообразия $\forall x(x \notin \neg \Diamond x \vee x \in \neg \Diamond x \Leftrightarrow F(x) \vee \neg F(x)) \Leftrightarrow \forall L(L\ 0\ \mathbf{L} \Leftrightarrow (L \vdash A)\ \Upsilon\ (L \vdash \neg A))$.

С другой стороны, из существования предиката $F(x) \vee \neg F(x)$ следует, что многообразие $\forall x(x \notin \neg \Diamond x \vee x \in \neg \Diamond x \Leftrightarrow F(x) \vee \neg F(x))$ не пусто и при $\forall x(x \in \neg \Diamond x \Leftrightarrow F(x)) \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A))$, $\forall x(x \notin \neg \Diamond x \Leftrightarrow \neg F(x)) \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash \neg A))$ существуют $\forall L(L \in \mathbf{L} = \mathbf{L_1} \cup \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A)\ \Upsilon\ (L \vdash \neg A))$ и $(L \vdash A)\ \Upsilon\ (L \vdash \neg A)$, а значит, существует закон (5).

Такое многообразие является классом, т.к. не содержит противоречие $x \notin \Diamond x \wedge x \in \Diamond x$. Интерпретацией многообразия невозможностей в традиционной логике и в теории множеств является множество и в теоретической физике множество частиц с неопределенной функцией состояния или волновой функцией.

---

3. М.И. Дьяченко, П.Л. Ульянов. Мера и интеграл. М.: Факториал Пресс, 2002.

4. К. Гедель. Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств. Успехи математических наук, 3, № 1, 96-149, 1948.

Теорема 4: существует упорядоченная пара $Ap(\Diamond x) = \langle \neg \Diamond x, \Diamond x \rangle$ называемая возникновением возможности x, т.е. возможность возникает в отношении многообразия невозможностей и многообразия возможностей.

Доказательство.

С одной стороны, из (5) следует существование многообразия $\forall L(L \in \mathbf{L} = \mathbf{L_1} \cup \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A)\ \Upsilon\ (L \vdash \neg A)\ \Upsilon\ ((L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A)))$ и при $\Diamond x \Leftrightarrow \forall x(x \notin \Diamond x \wedge x \in \Diamond x \Leftrightarrow F(x) \wedge \neg F(x)) \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A)), \neg \Diamond x \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A)\ \Upsilon\ (L \vdash \neg A))$ следует существование многообразия $Ap(\Diamond x) = \langle \neg \Diamond x, \Diamond x \rangle \Leftrightarrow \{\{\neg \Diamond x\}, \{\neg \Diamond x, \Diamond x\}\} \Leftrightarrow \{\{\forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A)\ \Upsilon\ (L \vdash \neg A))\}, \{\forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A)\ \Upsilon\ (L \vdash \neg A)), \forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A))\}\}$.

С другой стороны, из существования многообразия $Ap(\Diamond x) = \langle \neg \Diamond x, \Diamond x \rangle$ при $\neg \Diamond x \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A)\ \Upsilon\ (L \vdash \neg A)), \Diamond x \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A))$ следует, что многообразие $\{\{(L \vdash A)\ \Upsilon\ (L \vdash \neg A)\}, \{(L \vdash A)\ \Upsilon\ (L \vdash \neg A), (L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A)\}\}$ не пусто, существует $(L \vdash A)\ \Upsilon\ (L \vdash \neg A)\ \Upsilon\ ((L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A))$ и закон (5) существует.

При этом $\neg\ Ap(\Diamond x) = \{\neg \Diamond x, \Diamond x\}$, т.е. не возникновение равно неупорядоченной паре, которая следует из закона (5) аналогично предыдущему.

Теорема 5: существует упорядоченная пара $Di(\Diamond x) = \langle \Diamond x, \neg \Diamond x \rangle$, называемая исчезновением возможности x.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4. При этом $\neg\ Di(\Diamond x) \Leftrightarrow \neg\ Ap(\Diamond x) = \{\neg \Diamond x, \Diamond x\}$.

Теорема 6: существует многообразие $Ps \Leftrightarrow \forall x(x \in Ps \Leftrightarrow (Ap(\Diamond x) \wedge Di(\Diamond x)))$, называемое прошлым возможностей или возможным прошлым, т.е. прошлое возможностей остается после возникновений и исчезновений всех возможностей.

Доказательство.

С одной стороны, из (5) следует существование $(L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A)$ и при $Ap(\Diamond x) \Leftrightarrow (L \vdash A)$, $Di(\Diamond x) \Leftrightarrow (L \vdash \neg A)$ следует существование предиката $Ap(\Diamond x) \wedge Di(\Diamond x) \Leftrightarrow (L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A)$.

С другой стороны, из существования предиката $Ap(\Diamond x) \wedge Di(\Diamond x)$ следует при $Ap(\Diamond x) \Leftrightarrow (L \vdash A)$, $Di(\Diamond x) \Leftrightarrow (L \vdash \neg A)$, что многообразие $\forall L(L \in \mathbf{L} \Leftrightarrow (L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A))$ не пусто, существует $(L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A)$ и закон (5) существует.

Прошлое Ps счетно в силу ограниченности, содержащейся в предикате $Ap(\Diamond x) \wedge Di(\Diamond x)$.

Теорема 7: существует многообразие $Ft \Leftrightarrow \forall x(x \in Ft \Leftrightarrow (\neg\ Ap(\Diamond x)\ \Upsilon\ \neg\ Di(\Diamond x)))$, называемое будущим возможностей или возможным будущим.

Доказательство.

С одной стороны, из (5) следует существование $(L \vdash A) \Upsilon (L \vdash \neg A)$ и при $\neg Ap(\Diamond x) \Leftrightarrow (L \vdash A)$, $\neg Di(\Diamond x) \Leftrightarrow (L \vdash \neg A)$ следует существование предиката $\neg Ap(\Diamond x) \Upsilon \neg Di(\Diamond x) \Leftrightarrow (L \vdash A) \Upsilon (L \vdash \neg A)$.

С другой стороны, из существования предиката $\neg Ap(\Diamond x) \Upsilon \neg Di(\Diamond x)$ следует при $\neg Ap(\Diamond x) \Leftrightarrow (L \vdash A)$, $\neg Di(\Diamond x) \Leftrightarrow (L \vdash \neg A)$, что многообразие $\forall L(L \in \mathbf{L} \Leftrightarrow (L \vdash A) \Upsilon (L \vdash \neg A))$ не пусто, существует $(L \vdash A) \Upsilon (L \vdash \neg A)$ и закон (5) существует.

Будущее Ft не счетно в силу неограниченности, содержащейся в предикате $\neg Di(\Diamond x)$.

Теорема 8: существует многообразие $Pr \Leftrightarrow \forall x(x \in Pr \Leftrightarrow \neg Ps \wedge \neg Ft)$, называемое настоящим возможностей, настоящим пространством возможностей или возможным настоящим пространством.

Доказательство.

С одной стороны, из (5) следует существование $(L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A)$ и при $\neg Ps \Leftrightarrow (L \vdash A)$, $\neg Ft \Leftrightarrow (L \vdash \neg A)$ следует существование предиката $Pr \Leftrightarrow \neg Ps \wedge \neg Ft \Leftrightarrow (L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A)$.

С другой стороны, из существования предиката $Pr \Leftrightarrow \neg Ps \wedge \neg Ft$ следует при $\neg Ps \Leftrightarrow (L \vdash A)$, $\neg Ft \Leftrightarrow (L \vdash \neg A)$, что многообразие $\forall L(L \in \mathbf{L} \Leftrightarrow (L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A))$ не пусто, существует $(L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A)$ и закон (5) существует.

Теорема 9: существует упорядоченная тройка $ST \Leftrightarrow \langle Ps, Pr, Ft\rangle$, называемая возможным метрическим пространством-временем.

Доказательство.

С одной стороны, из (5), т.е существования $(L \vdash A) \Upsilon (L \vdash \neg A) \Upsilon ((L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A))$ при $Ps \cup Ft \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A) \Upsilon (L \vdash \neg A))$, $Pr \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A))$ следует существование многообразия $ST = \langle Ps, \langle Pr, Ft\rangle\rangle \Leftrightarrow \{\{Ps\}, \{Ps, \langle Pr, Ft\rangle\}\} \Leftrightarrow \{\{Ps\}, \{Ps, \{\{Pr\}, \{Pr, Ft\}\}\}\} \Leftrightarrow \{\{\forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A) \Upsilon (L \vdash \neg A))\}, \{\forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A) \Upsilon (L \vdash \neg A)), \{\{\forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A))\}, \{\forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A)), \forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A) \Upsilon (L \vdash \neg A))\}\}\}\}$.

С другой стороны, из существования многообразия $ST \Leftrightarrow \langle Ps, Pr, Ft\rangle$ при $Ps \cup Ft \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A) \Upsilon (L \vdash \neg A))$, $Pr \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A))$ следует, что многообразие $\{\{\forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A) \Upsilon (L \vdash \neg A))\}, \{\forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A) \Upsilon (L \vdash \neg A)), \{\{\forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A))\}, \{\forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A)), \forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A) \Upsilon (L \vdash \neg A))\}\}\}\}$ не пусто, существует $(L \vdash A) \Upsilon (L \vdash \neg A) \Upsilon ((L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A))$ и закон (5) существует.

Учитывая определение материи в традиционной логике: « ... возможность и есть у каждой вещи материя.» [2, стр. 198], «...субстрат ... мы называем материей.» [2, стр. 177], определение единого: «... все, что не допускает деления, вообще называется единым, именно поскольку оно не допускает деления; например, если что-то не допускает деления как человек, то оно один человек; ...» [2, стр. 154], и определение сущности: «...сущность каждой вещи есть единое не привходящим образом» [2, стр. 120], «… если материя есть именно потому, что она невозникшая, то тем более обоснованно, чтобы была сущность – то, чем материя всякий раз становится: … необходимо должно существовать что-то помимо составного целого, именно … форма» [2, стр. 110], рассмотрим следующие следствия закона (5).

Теорема 10: существует неупорядоченная пара $E_{ST} \Leftrightarrow \{ST, \Diamond x\}$, называемая возможной единой сущностью или единым материальной частицы с формой ST, где ST называется также возможным внутренним измеримым или метрическим пространством-временем материальной частицы с единой сущностью E_{ST}, а $\Diamond x$ называется по-прежнему многообразием возможностей или в соответствии с традиционной логикой материей частицы с единой сущностью E_{ST}.

Доказательство.

С одной стороны, из (5) при $ST \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A) \curlyvee (L \vdash \neg A) \curlyvee ((L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A)))$, $\Diamond x \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A))$ следует существование многообразия $E_{ST} \Leftrightarrow \{ST, \Diamond x\} \Leftrightarrow \{\forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A) \curlyvee (L \vdash \neg A) \curlyvee ((L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A))), \forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A))\}$.

С другой стороны, из существования многообразия $E_{ST} \Leftrightarrow \{ST, \Diamond x\}$ при $ST \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A) \curlyvee (L \vdash \neg A) \curlyvee ((L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A)))$, $\Diamond x \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A))$ следует, что многообразие $\{\forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A) \curlyvee (L \vdash \neg A) \curlyvee ((L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A))), \forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A) \wedge (L \vdash \neg A))\}$ не пусто и закон (5) существует.

Учитывая определение привходящего и целого в традиционной логике: «Привходящим ... называется то, что чему-то присуще ... не по необходимости ...» [2, стр. 178], «Целым называется то, у чего не отсутствует ни одна из тех частей, состоя из которых оно именуется целым от природы, а также то, что так объемлет объемлемые им вещи, что последние образуют нечто одно; а это бывает двояко: или так, что каждая из этих вещей есть одно, или так, что из всех них образуется одно» [2, стр. 174-175].

Теорема 11: существует объединение $C_{\alpha\beta} \Leftrightarrow E_\alpha \cup \exists\beta\ E_\beta$, называемое возможной целой материальной системой с единой сущностью E_α, где $\exists\beta\ E_\beta$ называется привходящим материальной системы $C_{\alpha\beta}$.

Доказательство.

С одной стороны, из (5) при $E_\alpha \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A_\alpha) \curlyvee (L \vdash \neg A_\alpha) \curlyvee ((L \vdash A_\alpha) \wedge (L \vdash \neg A_\alpha)))$, $\exists\beta\ E_\beta \Leftrightarrow \exists\beta\ (\forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A_\beta) \curlyvee (L \vdash \neg A_\beta) \curlyvee ((L \vdash A_\beta) \wedge (L \vdash \neg A_\beta))))$ следует существование многообразия $C_{\alpha\beta} \Leftrightarrow E_\alpha \cup \exists\beta\ E_\beta \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A_\alpha) \curlyvee (L \vdash \neg A_\alpha) \curlyvee ((L \vdash A_\alpha) \wedge (L \vdash \neg A_\alpha))) \cup \exists\beta\ (\forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A_\beta) \curlyvee (L \vdash \neg A_\beta) \curlyvee ((L \vdash A_\beta) \wedge (L \vdash \neg A_\beta))))$.

С другой стороны, из существования многообразия $C_{\alpha\beta} \Leftrightarrow E_\alpha \cup \exists\beta\, E_\beta$ при $E_\alpha \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A_\alpha)\, \Upsilon\, (L \vdash \neg A_\alpha)\, \Upsilon\, ((L \vdash A_\alpha) \wedge (L \vdash \neg A_\alpha)))$, $\exists\beta\, E_\beta \Leftrightarrow \exists\beta\, (\forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A_\beta)\, \Upsilon\, (L \vdash \neg A_\beta)\, \Upsilon\, ((L \vdash A_\beta) \wedge (L \vdash \neg A_\beta))))$ следует, что многообразие $\forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A_\alpha)\, \Upsilon\, (L \vdash \neg A_\alpha)\, \Upsilon\, ((L \vdash A_\alpha) \wedge (L \vdash \neg A_\alpha))) \cup \exists\beta\, (\forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A_\beta)\, \Upsilon\, (L \vdash \neg A_\beta)\, \Upsilon\, ((L \vdash A_\beta) \wedge (L \vdash \neg A_\beta))))$ не пусто, существует $(L \vdash A_\alpha)\, \Upsilon\, (L \vdash \neg A_\alpha)\, \Upsilon\, ((L \vdash A_\alpha) \wedge (L \vdash \neg A_\alpha)) \vee (L \vdash A_\beta)\, \Upsilon\, (L \vdash \neg A_\beta)\, \Upsilon\, ((L \vdash A_\beta) \wedge (L \vdash \neg A_\beta))$ и закон (5) существует.

Теорема 12: существует упорядоченная пара $D_{\alpha\beta gh} \Leftrightarrow \langle C_{\alpha\beta}, C_{gh}\rangle$, называемая возможным движением материальной системы $C_{\alpha\beta}$ относительно материальной системы C_{gh}.

Доказательство.

С одной стороны, из (5) при $C_{\alpha\beta} \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A_{\alpha\beta})\, \Upsilon\, (L \vdash \neg A_{\alpha\beta})\, \Upsilon\, ((L \vdash A_{\alpha\beta}) \wedge (L \vdash \neg A_{\alpha\beta})))$, $C_{gh} \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A_{gh})\, \Upsilon\, (L \vdash \neg A_{gh})\, \Upsilon\, ((L \vdash A_{gh}) \wedge (L \vdash \neg A_{gh})))$ следует существование многообразия $D_{\alpha\beta gh} \Leftrightarrow \langle C_{\alpha\beta}, C_{gh}\rangle \Leftrightarrow \{\{C_{\alpha\beta}\}, \{C_{\alpha\beta}, C_{gh}\}\} \Leftrightarrow \{\{\forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A_{\alpha\beta})\, \Upsilon\, (L \vdash \neg A_{\alpha\beta})\, \Upsilon\, ((L \vdash A_{\alpha\beta}) \wedge (L \vdash \neg A_{\alpha\beta})))\}, \{\forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A_{\alpha\beta})\, \Upsilon\, (L \vdash \neg A_{\alpha\beta})\, \Upsilon\, (((L \vdash A_{\alpha\beta}) \wedge (L \vdash \neg A_{\alpha\beta}))), \forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A_{gh})\, \Upsilon\, (L \vdash \neg A_{gh})\, \Upsilon\, ((L \vdash A_{gh}) \wedge (L \vdash \neg A_{gh})))\}\}$.

С другой стороны, из существования многообразия $D_{\alpha\beta gh} \Leftrightarrow \langle C_{\alpha\beta}, C_{gh}\rangle$, где $C_{\alpha\beta} \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A_{\alpha\beta})\, \Upsilon\, (L \vdash \neg A_{\alpha\beta})\, \Upsilon\, (((L \vdash A_{\alpha\beta}) \wedge (L \vdash \neg A_{\alpha\beta})))$ и $C_{gh} \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A_{gh})\, \Upsilon\, (L \vdash \neg A_{gh})\, \Upsilon\, ((L \vdash A_{gh}) \wedge (L \vdash \neg A_{gh})))$, следует, что многообразие $\{\{\forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A_{\alpha\beta})\, \Upsilon\, (L \vdash \neg A_{\alpha\beta})\, \Upsilon\, (((L \vdash A_{\alpha\beta}) \wedge (L \vdash \neg A_{\alpha\beta})))\}, \{\forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A_{\alpha\beta})\, \Upsilon\, (L \vdash \neg A_{\alpha\beta})\, \Upsilon\, (((L \vdash A_{\alpha\beta}) \wedge (L \vdash \neg A_{\alpha\beta}))), \forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A_{gh})\, \Upsilon\, (L \vdash \neg A_{gh})\, \Upsilon\, ((L \vdash A_{gh}) \wedge (L \vdash \neg A_{gh})))\}\}$ не пусто и закон (5) существует.

Следствие: $D_{\alpha\beta gh} \supset \langle (ST_1 = \alpha)\, \Upsilon\, (ST_2 = \beta)\,,\, (ST_3 = g)\, \Upsilon\, (ST_4 = h)\rangle$.

Действительно, из существования $D_{\alpha\beta gh} \Leftrightarrow \langle C_{\alpha\beta}, C_{gh}\rangle \Leftrightarrow \langle\, E_\alpha\, \Upsilon\, \exists\beta\, E_\beta, E_g\, \Upsilon\, \exists h\, E_h\, \rangle \Leftrightarrow \langle \{ST_1 = \alpha, \Diamond x\}\, \Upsilon\, \exists y\, \{ST_2 = \beta, \Diamond y\}, \{ST_3 = g, \Diamond g\}\, \Upsilon\, \exists h\, \{\, ST_4 = h, \Diamond h\}\rangle$ очевидно следует данное утверждение.

Это является доказательством принципа реляционности формирования пространства-времени в результате движения, что предоставляет возможность управления внутренним пространством-временем некоторой целой частицы при изменении параметров ее движения относительно другой целой частицы. Такая интерпретация данного следствия является основой для опытно-экспериментальных исследований природы пространства-времени как в целом для всей природы, так и локальных ее частей, основной целью которых должна стать возможность продления времени существования посредством изменения темпов внутреннего пространства-времени.

Теорема 13: существуют множества $\mathrm{D}^*_{\alpha\beta gh} \Leftrightarrow \langle \mathrm{C}^*_{\alpha\beta}, C^*_{gh}\rangle$, называемые не парадоксальным действительным движением действительных целых материальных частиц в действительных измеримых или метрических пространство-временах.

Доказательство.

С одной стороны, из теоремы 12 следует, что при $C^*_{\alpha\beta} \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A_{\alpha\beta})\ \Upsilon\ (L \vdash \neg A_{\alpha\beta}))$, $C^*_{gh} \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A_{gh})\ \Upsilon\ (L \vdash \neg A_{gh}))$ существует не парадоксальное многообразие $D^*_{\alpha\beta gh} \Leftrightarrow \langle C^*_{\alpha\beta}, C^*_{gh}\rangle \Leftrightarrow \{\{C^*_{\alpha\beta}\}, \{C^*_{\alpha\beta}, C^*_{gh}\}\} \Leftrightarrow \{\{\forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A_{\alpha\beta})\ \Upsilon\ (L \vdash \neg A_{\alpha\beta}))\}, \{\forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A_{\alpha\beta})\ \Upsilon\ (L \vdash \neg A_{\alpha\beta})), \forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A_{gh})\ \Upsilon\ (L \vdash \neg A_{gh}))\}\}$.

С другой стороны, из существования не парадоксального многообразия $D^*_{\alpha\beta gh} \Leftrightarrow \langle C^*_{\alpha\beta}, C^*_{gh}\rangle \Leftrightarrow \{\{C^*_{\alpha\beta}\}, \{C^*_{\alpha\beta}, C^*_{gh}\}\} \Leftrightarrow \{\{\forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A_{\alpha\beta})\ \Upsilon\ (L \vdash \neg A_{\alpha\beta}))\}, \{\forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A_{\alpha\beta})\ \Upsilon\ (L \vdash \neg A_{\alpha\beta})), \forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A_{gh})\ \Upsilon\ (L \vdash \neg A_{gh}))\}\}$ при $C^*_{\alpha\beta} \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_1} \Leftrightarrow (L \vdash A_{\alpha\beta})\ \Upsilon\ (L \vdash \neg A_{\alpha\beta}))$, $C^*_{gh} \Leftrightarrow \forall L(L \in \mathbf{L_2} \Leftrightarrow (L \vdash A_{gh})\ \Upsilon\ (L \vdash \neg A_{gh}))$ следует, что это многообразие не пусто, существует $(L \vdash A_{\alpha\beta})\ \Upsilon\ (L \vdash \neg A_{\alpha\beta}) \vee (L \vdash A_{gh})\ \Upsilon\ (L \vdash \neg A_{gh})$ и закон (5) существует.

В связи с введением новых отношений для пар в доказательстве теоремы 2, уточним понимание логических связок $\wedge$, $\vee$, Υ, $\supset$, $\neg$ между введенными многообразиями. Естественным образом, т.е. по определению для множеств, вводится операция отрицания многообразия $\neg$, например, $\neg \Diamond x \Leftrightarrow \forall x \neg (x \notin \Diamond x \wedge x \in \Diamond x \Leftrightarrow F(x) \wedge \neg F(x)) \Leftrightarrow \forall x\ (x \notin \Diamond x \vee x \in \Diamond x \Leftrightarrow F(x) \vee \neg F(x))$. Если два многообразия являются классами, то связки $\wedge$, $\vee$, Υ, $\supset$ ведут себя аналогично соответствующим связкам из теории множеств. Если же одно из многообразий является $\Diamond x$, то связка $\vee$ добавляет в результат парадокс, присущий $\Diamond x$, как возможный парадокс в результирующем многообразии, сохраняя введенные отношения для пар и для результирующего многообразия. Связка $\wedge$ добавляет тот же парадокс как необходимый в результирующем многообразии, т.е. делает результирующее многообразие многообразием с введенными отношениями для пар. В последнем случае в посылке связка $\supset$ возможна только между предикатами с участием $\Diamond x$. Предикаты с $\Diamond x$ не могут быть ложной посылкой, т.к. любые посылки с $\Diamond x$ могут быть либо возможным пространством – временем, либо возможной материальной частицей. Поэтому связка $\supset$ с $\Diamond x$ в посылке истинна, что соответствует материальной импликации. Связка $\supset$ с $\Diamond x$ в заключении и не пустым многообразием в посылке естественно ложна. И, наконец, та же связка с не пустыми многообразиями в посылке и заключении истинна, что обоснованно и полностью соответствует и понятию материальной импликации.

Таким образом, предлагаемая метаметатеория, называемая модальной метаметатеорией, основана на метазаконе не исключенных возможностей и представляет собой истинную систему, включающую в себя как непротиворечивые выводы, так и парадоксы, что исключает необходимость доказательства ее непротиворечивости.

Интерпретацией модальной метаметатеории является в традиционной логике понятие истины: « ... истинно то, что для последующего есть причина его истинности», « ... причины существующего не беспредельны … если будет … последнее, то не будет бесконечного движения; если же нет такого последнего, то не будет конечной цели» [2, стр. 95, 96], что означает, что истина имеет замкнутую кольцевую структуру, элементами которой являются многообразия и которая представлена на рисунке. Причинно-следственные связи в этой схеме при трактовке пустого многообразия, данной в доказательстве следствия 3, исключают двойственность понимания глагольных связок «суть», «есть» и «это» в тексте [2], возникающую при классическом определении пустого множества [1]. Действительно, в этом случае эти глагольные связки соответствуют логической операции импликации $\supset$ в силу того, что $(\Diamond x \neq \varnothing) \wedge (\neg \Diamond x \neq \varnothing)$, т.к. многообразия возможностей и невозможностей всегда содержат в себе некоторые элементы. При этом в силу кольцевой структуры истины импликация в каждой цитате может быть заменена на обратную, но не совместно, что привело бы к ложному отношению эквивалентности, т.к. прямая и обратная импликации имеют разные промежуточные связи, например, приведенные ниже цитаты определений понятий «Часть» и «Количество» не означают их эквивалентности. Эта особенность импликации в модальной метаметатеории делает ее истинной в смысле кольцевой структуры истины в [2]:

1. Для понятия «Начало» - « ... природа … и сущность, и цель суть начала …» (стр. 145).
2. Для понятия «Природа» - « ... природа, или естество, ... есть ... , что имеет начало … в самом себе …» (стр. 150).
3. Для понятий «Сущность», «Единое», «Целое», «Возникновение», «Исчезновение», «Возможное» и «Невозможное» - приведены выше.
4. Для понятия «Непрерывное» - «непрерывное … - это то, что, будучи следующим по порядку, соприкасается с предшествующим» (стр. 298).
5. Для понятия «Состояние» - «состоянием называется свойство, в отношении которого возможны изменения» (стр. 171).
6. Для понятия «Предел» - «Пределом называется граница …, т.е. то первое, вне которого нельзя найти ни одной его части, и то первое, внутри которого находятся все его части» (стр. 169).
7. Для понятия «Часть» - «Частью называется то, на что можно … разделить … количество». (стр. 174).
8. Для понятия «Количество» - «Количеством называется то, что делимо на составные части» (стр. 164).
9. Для понятия «Множество» - «Множеством же называется то, что в возможности делимо на части не непрерывные» (стр. 164).

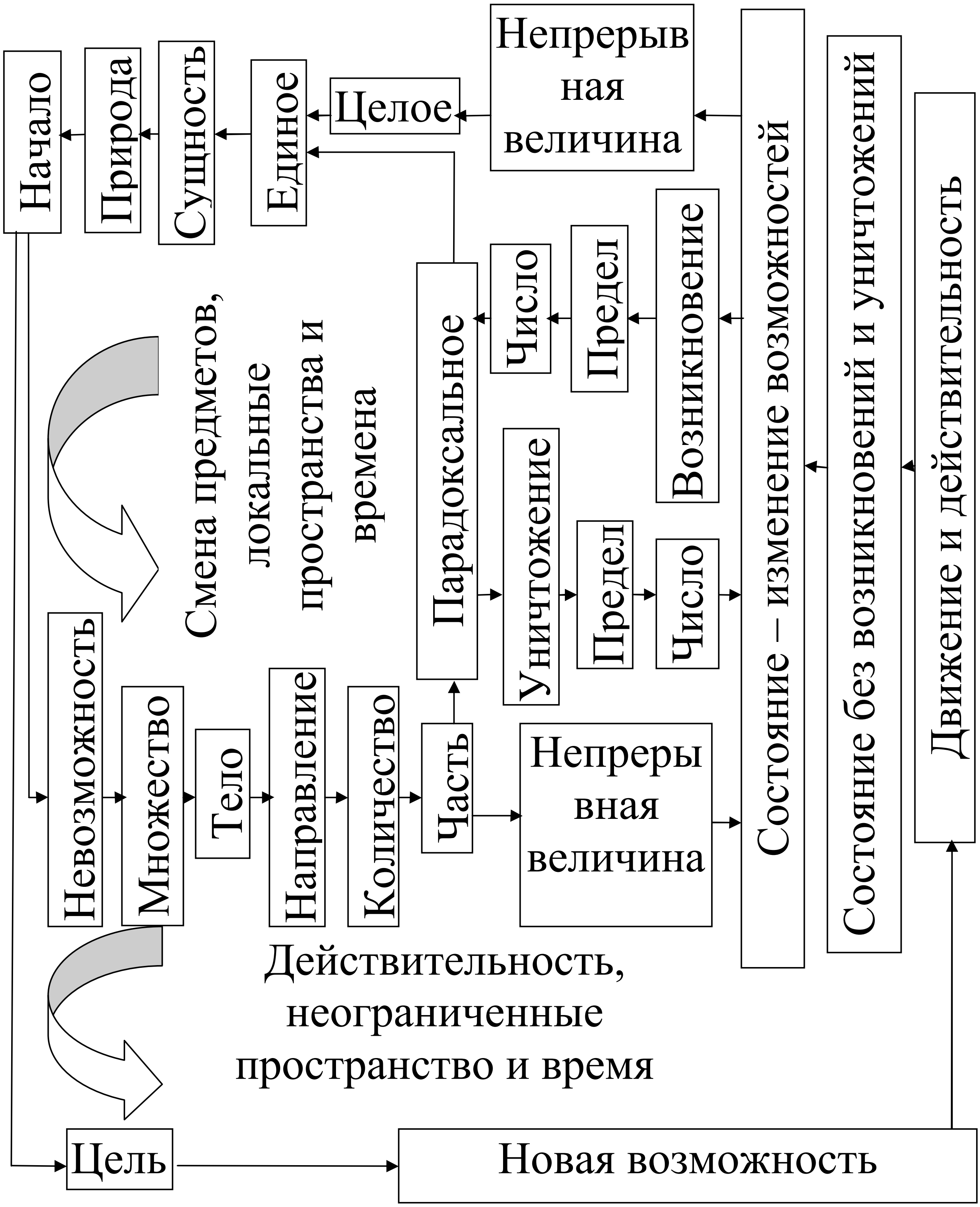

Рис. Содержание истины по Аристотелю и обобщенные внутренние связи модальной метаметатеории.

10. Для понятия «Величина» - «Величиной – (же называется то, что в возможности делимо) на части непрерывные» (стр. 164).

11. Для понятия «Число» - «ограниченное множество есть число» (стр. 164).

12. Для понятия «Направление» - «из величин непрерывная в одном направлении есть длина, непрерывная в двух направлениях – ширина, непрерывная в трех направлениях – глубина» (стр. 164).

13. Для понятия «Тело» - «ограниченная глубина – тело» (стр. 164).

14. Для понятия «Цель» - «цель суть начала» (ср. 145).

15. Для понятия «Движение» - « … из этих изменений те, что относятся к возникновению и уничтожению, не суть движения (это именно изменения по противоречию), то движением необходимо признавать одно только изменение из одного субстрата в другой субстрат.», «А субстраты либо противоположны друг другу, либо суть нечто промежуточное…» (стр. 295).

16. Для понятия «Действительность» - «но если в движении заключена цель, то оно и есть действие», «То, что из сущего в возможности становится действительным через замысел, можно определить так: оно то, что возникает по воле [действующего], если нет каких-либо внешних препятствий; … и одинаково обстоит дело и со всем остальным, у чего начало возникновения находится вовне» (стр. 242, 243).

17. Для понятия «Реляционный принцип формирования пространства-времени» - «расстояние есть некоторое количество, и движение есть количество, а время есть количество потому, что движение есть количество» (стр. 165).

Из рисунка видно, что парадоксальное является основой истины формирования природы, пространства и времени, а все понятия, составляющие истину по Аристотелю, определены в формальном описании предлагаемой метаметатеории.

Таким образом, в модальной метаметатеории доказано существование действительного не парадоксального движения, существование действительных материальных частиц, а также существование действительных пространство-времен, включая существование внутренних локальных пространство-времен материальных частиц, которыми можно управлять в действительности посредством изменения метрик действительных пространство-времен как множеств, свободных от парадоксов, изменяя параметры относительного движения этих частиц.

Программа Гильберта является интерпретацией модальной метаметатеории как противоречивая метатеория, допустимая в модальной метаметатеории в силу третьего противоречивого слагаемого метазакона (5).

Предметной интерпретацией модальной метаметатеории являются логика формирования пространства и времени [5], математическая модель многомерного времени [6], математические модели продления времени существования, основанные на принципе стационарного действия [7, 8], логика взаимосвязей диалектических категорий [9], реляционная модель формирования природы [10, 11].

Практической предметной интерпретацией модальной метаметатеории является модель опытно - логических исследований природы [10, 11], имеющая своей целью управление локальными пространство-временами движущихся частиц и требующая дальнейшего развития модальной метаметатеории.

Список литературы.

1. С.К. Клини. Математическая логика. М.: КомКнига, 2007.

2. Аристотель. Соч. в 4 т., т. 1, Метафизика. М.: Мысль, 1976.

3. М.И. Дьяченко, П.Л. Ульянов. Мера и интеграл. М.: Факториал Пресс, 2002.

4. К. Гедель. Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств. Успехи математических наук, 3, № 1, 96-149, 1948.

5. Г.К. Мкртумян. Математическая модель формирования пространства и времени. // Сб. научных трудов 10-ой международной конференции «Математические модели физических процессов», Таганрог, ТГПИ, 2004.

6. Г.К. Мкртумян. Математическая модель многомерного времени. // Сб. научных трудов 11-ой международной конференции «Математические модели физических процессов», Таганрог, ТГПИ, 2005.

7. Г.К. Мкртумян. Принцип стационарного действия и проблема формирования природы. // Материалы всероссийской конференции с международным участием «Математика, ее приложения и математическое образование», Улан-Удэ, ВСГТУ, 2005.

8. Г.К. Мкртумян. Дополнительное условие включения в поле экстремалей и продление времени существования. // Сб. трудов XIX международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях» ММТТ-19, Воронеж, ВГТА, 2006.

9. Г.К. Мкртумян. Математическая модель взаимосвязей диалектических категорий и существование многозначного времени. // Сб. трудов XX международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях» ММТТ-20, Ярославль, ЯГТУ, 2007.

10. Г.К. Мкртумян. Реляционная модель формирования природы, пространства и времени. // Сб. научных трудов 21-ой международной конференции «Математические методы в технике и технологиях», 18-25, Саратов, СГТУ, 2008.

11. Г.К. Мкртумян. Математическая модель природы. // Сб. научных трудов 21-ой международной конференции «Математические методы в технике и технологиях», 168-173, Саратов, СГТУ, 2008.

©Г.К. Мкртумян