Пространство–время и кватернионы.

К столетию лекции, прочитанной Ф. Клейном в Гёттингенском математическом обществе, о возможности использования кватернионов для описания преобразований Лоренца.

Кубышкин Е.И. **июль 2010г.**

1. Введение.

21 сентября 1908г. в своём выступлении на собрании немецких естествоиспытателей и врачей в Кельне Г. Минковский представил модель физического пространства, объединившую пространство и время в единый четырёхмерный объект. Модель стала обобщением работ многих учёных по исследованию свойств физического пространства. В основе математического формализма метода Г. Минковского было использовано четырёхмерное линейное пространство над полем действительных чисел. Для описания метрических свойств единого пространства–времени была принята знакопеременная квадратичная форма. Эту метрическую форму часто называют метрикой Минковского, а само это пространство пространством Минковского. Пространство Минковского является псевдоевклидовым пространством. На сегодняшний день эта модель пространства–времени является общепризнанной и, в частности, лежит в основе специальной теории относительности.

В 1910г. в лекции, прочитанной в Гёттингенском математическом обществе, Ф. Клейн доложил о возможности использования кватернионов с комплексными коэффициентами для описания преобразований Лоренца [1].
На рис.1, рис.2, рис.3 представлен фрагмент этой работы Ф. Клейна. В более поздней работе [2] Ф. Клейн писал:

"Преобразования Лоренца", на изучении которых основаны исследования, относящиеся к "принципу относительности" представляют не что иное, как поворот некоторого пространства R_4 , и могут быть даже представлены самым удобным образом с помощью формул исчисления кватернионов. Как известно под преобразованием Лоренца понимают такую линейную однородную подстановку (с действительными коэффициентами) трёх координат в пространстве x, y, z и времени t:

$$x^/ = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (C7),$$
$$t^/ = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t$$

которая преобразует квадратичную форму $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ *(где* c *есть скорость света) в себя, так что*

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=(x^/)^2+(y^/)^2+(z^/)^2-c^2(t^/)^2, \quad (C8)$$

и у которой последний коэффициент

$$\frac{dt^/}{dt}=a_{44}>0. \qquad (C9)$$

При этом ради краткости не принято во внимание могущее иметь место смещение начальной точки $x=y=z=t=0$. *Оказывается, что в исчислении кватернионов легко можно указать такую подстановку, которая удовлетворяет условию (C8), если только на первое время оставить без внимания требование действительности коэффициентов и неравенство (C9). Для этого нужно рассматривать такие кватернионы, компонентами которых являются не действительные, а обыкновенные комплексные числа, образованные с помощью обыкновенной мнимой единицы* $\sqrt{-1}$ *(которую следует отличать от специальных единиц исчисления кватернионов* i, j, k. *Заметим, прежде всего, что кватернионы*

$$q=\sqrt{-1}\times c\times t+ix+jy+kz$$
$$q^/=\sqrt{-1}\times c\times t^/+ix^/+jy^/+kz^/ \qquad (C10)$$

имеют своими модулями квадратные корни из квадратичных форм (C8). Поэтому можно точно также, как выше доказать, что формула

$$q^/=\frac{p\times q\times\pi}{M}$$

описывает линейную подстановку, удовлетворяющее условию (C8), если p *и* π*–произвольные кватернионы с комплексными коэффициентами, а* M *квадратный корень из произведения их модулей.*

Чтобы получить действительные коэффициенты и удовлетворить условию (C9), надо в качестве p *и* π *взять специально подобранные сопряжённые кватернионы получаемые следующим образом.*

Пусть A, A$^/$, …, D, D$^/$ *–восемь действительных величин, связанных равенством*

$$AA^/+BB^/+CC^/+DD^/=0 \qquad (C11)$$

и неравенством

$$A^2+B^2+C^2+D^2>(A^/)^2+(B^/)^2+(C^/)^2+(D^/)^2. \qquad (C12)$$

Тогда мы положим

$$p=(D+\sqrt{-1}D^/)+i(A+\sqrt{-1}A^/)+j(B+\sqrt{-1}B^/)+k(C+\sqrt{-1}C^/)$$
$$\pi=(D-\sqrt{-1}D^/)-i(A-\sqrt{-1}A^/)-j(B-\sqrt{-1}B^/)-k(C-\sqrt{-1}C^/) \qquad (C13)$$
$$M=\left((A)^2+(B)^2+(C)^2+(D)^2\right)-\left((A^/)^2+(B^/)^2+(C^/)^2+(D^/)^2\right)$$

Формулы (C10) совместно с условиями (C11), (C12), (C13) дают запись всех преобразований Лоренца.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN

MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER

IN HALLE A. S.

NEUNZEHNTER BAND.

MIT DEM BILDNISSE VON PHILIPP WEINMEISTER
SOWIE 39 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1910.

Рис.1 Найдено по ссылке
http://www.digizeitschriften.de/main/dms/img/?PPN=GDZPPN00212281

Geometrische Grundlagen der Lorentzgruppe. 299

Denkens als Ausgangspunkt nimmt. Analoges möchte für das Studium der neuen Verhältnisse gelten, die innerhalb der Mechanik bei Zugrundelegung der Lorentzgruppe hervortreten. Es scheint unzweckmäßig, bei diesem Studium immer von den in der klassischen Mechanik geltenden Auffassungen auszugehen und dann zu überlegen, wie diese künstlich deformiert werden müssen, um auf die neue Mechanik zu passen. Vielmehr scheint es richtiger, sich vom Standpunkte der alten Mechanik zunächst zu einem umfassenderen zu erheben, der dann die alte und die neue Mechanik nebeneinander als spezielle Fälle umschließt. Nach dem, was oben angeführt wurde, ist hierfür nicht einmal nötig, sich in die *projektive* Auffassung der Welt hineinzudenken, denn es genügt die *affine* Auffassung. Es wird darauf ankommen, eine systematische Invariantentheorie der affinen „Welt“ zu schreiben, wozu übrigens alle Elemente in den mehrdimensionalen Untersuchungen der Mathematiker bereits vorliegen, und von ihr aus die beiden Arten der Mechanik, die alte und neue, nebeneinander zu behandeln. Wieso die alte Mechanik ein Grenzfall der neuen ist, inwieweit sie also als eine Annäherung an letztere angesehen werden darf, kommt dann von selbst hervor. Wer bringt dieses Programm zur Ausführung?

Minkowski hatte die hier geforderten Dinge für sich zweifellos sehr genau überlegt. Aber da er für den weiten Kreis der physikalisch interessierten Leser schrieb, hielt er es im Interesse der Verständlichkeit seiner Entwickelungen für zweckmäßiger, nicht seine bezüglichen inneren Überlegungen vorzutragen, sondern nur die auskristallisierte Form des Algorithmus, zu dem sie im Falle der Lorentzgruppe hinführen. Das ist Minkowskis vierdimensionale Vektorrechnung, die er ohne nähere Begründung als ein bestimmtes System fest verabredeter algebraischer Prozesse an die Spitze seiner elektrodynamischen Entwickelungen stellt.

[P. S. Ich hatte in meinem Vortrage vom 10. Mai insbesondere auch von der eleganten Darstellung der Koeffizienten der Lorentzgruppe durch zehn unabhängige Parameter gesprochen, die sich auf Grund einer wieder zuerst von Cayley aufgestellten berühmten Quaternionenformel ergibt.

Die Schlußformel ist die folgende. Ich verstehe unter i die gewöhnliche imaginäre Einheit, unter i_1, i_2, i_3 die spezifischen Einheiten des Quaternionenkalkuls. $A, A', \ldots D, D'$ seien acht Parameter, welche an die bilineare Gleichung

$$AA' + BB' + CC' + DD' = 0$$

Рис.2 Найдено по ссылке http://www.digizeitschriften.de/main/dms/img/?PPN=GDZPPN002122812 und übrigens die Ungleichung

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 > A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2$$

gebunden sein sollen. Ebenso seien x_0, y_0, z_0, t_0 vier Parameter. Die Substitutionen der Lorentzgruppe sind dann durch folgende Formel gegeben:

$$(i_1 x' + i_2 y' + i_3 z' + ict') - (i_1 x_0 + i_2 y_0 + i_3 z_0 + ict_0)$$
$$= \frac{\begin{bmatrix} (i_1(A + iA') + i_2(B + iB') + i_3(C + iC') + (D + iD')) \\ \cdot (i_1 x + i_2 y + i_3 z + ict) \\ \cdot (i_1(A - iA') + i_2(B - iB) + i_3(C - iC') - (D - iD')) \end{bmatrix}}{(A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2) - (A^2 + B^2 + C^2 + D^2)}.$$

Da die Multiplikation der $A, A', \ldots D, D'$ mit einem beliebigen gemeinsamen Faktor die Formel nicht ändert, die $A, A', \ldots$ aber andererseits der obigen Bilinearrelation unterworfen sind, haben wir in der Tat zehnfach unendlich viele Substitutionen vor uns.

Wegen der näheren Einzelheiten und der literarischen Nachweise vergleiche man etwa die „Zusätze und Ergänzungen", welche Herr Fritz Nöther dem eben erscheinenden Schlußhefte von Sommerfeld's und meiner „Theorie des Kreisels" (Leipzig, Teubner 1910) hinzugefügt hat. August 1910. Klein.]

Sui postulati della metrica generale projettiva.

Di BEPPO LEVI a Cagliari.

1. Il Klein ha rilevato che tutte le *costruzioni* della geometria projettiva possono condursi a operazioni in un campo limitato; felice osservazione da cui egli potè dedurre la prima completa dimostrazione della indipendenza della geometria projettiva dal postulato d'Euclide[1]), e quindi la consistenza logica delle metriche cayleyane. Invero i postulati da cui dipende una dimostrazione esprimono necessariamente proprietà di quei soli elementi di cui nella dimostrazione medesima è questione: solo apparentemente si fa talora uso di postulati più generali, in quanto, se così si fa per ovvie ragioni di opportunità (non solo pratica, ma logica)[2]) è però evidente che in una determinata dimostrazione si fa

1) Oggi, più semplicemente, si assumono come primitive quante e quali proposizioni *projettive* son necessarie per fondare la ordinaria geometria projettiva (Cfr. anche per la bibliografia: Enriques. Encykl. d. math. W. III A B 1 n. 18) e, precisamente dalla possibilità di definire, sulla base di essa, le metriche cayleyane, si conclude alla indipendenza loro dal postulato euclideo.

2) Che si tratti realmente di una opportunità logica mostreranno le considerazioni seguenti.

Рис.3 Найдено по ссылке http://www.digizeitschriften.de/main/dms/img/?PPN=GDZPPN002122812

Ф. Клейн предложил для описания физического пространства алгебраическую систему отличную от алгебры линейных пространств над телом. Таким образом, для описания свойств физического пространства были предложены две различные алгебраические системы, а именно алгебра линейных пространств над телом действительных чисел и алгебра кватернионов с комплексными коэффициентами.

У этих двух работ сложилась разная судьба. Математический формализм Минковского, объединивший пространство и время, был воспринят и понят исследователями и активно используется. Метод Клейна не был востребован и стал достоянием истории. Это связано с тем, что в методе Клейна использовались кватернионы с комплексными коэффициентами. Метод требовал применения новой алгебраической системы, отличной от стандартной алгебры кватернионов и от алгебры линейных пространств. Несмотря на теоретическую возможность такого подхода этот метод подвергся критике и не нашёл применения т.к. методы линейной алгебры оказались нагляднее и удобнее. Например, в работе Пенроуза Р. и Риндлера В. [3] отмечено:

> *"...кватернионы связаны с положительно определёнными формами, тогда как спин-матрица и преобразования Лоренца характеризуются лоренцевой сигнатурой (+, –, –, –). Конечно указанную трудность можно обойти путём введения кватернионов с надлежащими комплексными коэффициентами. Подобные объекты не будут обладать фундаментальными свойствами действительных кватернионов, т.е. не будут образовывать* алгебр*у с делением".*

В более поздней работе Пенроуза Р. [4] критика в адрес методов, использующих кватернионы, повторена:

> *"кватернионы не подходят для описания пространства–времени, так как естественная для кватернионов квадратичная форма* $q\bar{q}=t^2+u^2+v^2+w^2$*, с точки зрения теории относительности, имеет неправильную сигнатуру".*

Как мы видим методу Клейна, в котором кватернионы предлагаются для описания пространства–времени, исполнилось 100 лет. Существует критика этого метода со стороны высококлассных и уважаемых учёных. Однако Клейн был выдающимся математиком, и он прекрасно чувствовал возможность применения того или иного математического подхода. Поэтому, следуя интуиции великого математика, было предпринято исследование [5], позволившее модифицировать и решить задачу, поставленную Ф. Клейном в рамках стандартной алгебры кватернионов. Как показывают эти новые исследования, развитие подхода обозначенного Ф. Клейном может перерасти в будущую, общую теорию пространства–времени.

Говорят "всё новое это хорошо забытое старое". Такими старыми, непонятыми и забытыми являются работы Ф. Клейна в части применения кватернионов для описания преобразований Лоренца. Можно сказать, что

Клейн нашёл заветную дверь. Много лет исследователи проходили мимо этой находки. Сейчас дверь удалось приоткрыть, за ней оказался весь МИР.

Любая алгебраическая система, использованная для построения модели физического пространства, подразумевает совпадение множества функций модели с функциями, экспериментально регистрируемыми у физического пространства. Под экспериментальными функциями понимаются различные физические законы. Например, закон, по которому складываются направленные отрезки (векторы) в физическом пространстве, или метрические свойства физического пространства и т.д. Обычно на начальном этапе построения модели, части множества функций математической модели, не совпадающие с экспериментом, отсекаются с помощью различных соглашений (постулатов, аксиом). К таким соглашениям можно отнести постулированную знакопеременную метрику в модели Минковского. Алгебра четырёхмерного линейного пространства над полем действительных чисел, как некоторая математическая система, допускает несколько квадратичных форм, которые могут использоваться для определения длин векторов. Однако с помощью принятого постулата в модели Минковского, оставлена только одна единственная знакопеременная метрическая форма, остальные формы "административно" исключены. Такой подход возможен, но он сразу указывает на неполное соответствие свойств выбранной алгебраической системы и реального объекта, – физического пространства. На возможность использования алгебраической системы, отличной от алгебры линейных пространств, указал Ф. Клейн.

У выбранной Ф. Клейном алгебраической системы (алгебра кватернионов с комплексными коэффициентами) были те же недостатки что у модели Минковского. Т.е. выбранная алгебраическая система не полностью соответствовала свойствам реального объекта. Но Ф. Клейн оставил очень важное указание, а именно: обратил внимание на то, что возможны иные алгебраические системы, кроме линейных пространств над телом, для описания законов физического пространства; например алгебра кватернионов с комплексными коэффициентами.

Если отвлечься от комплексных коэффициентов в представлении кватернионов то, по сути, предлагался совершенно новый подход к определению размерности физического пространства. Эта сторона предложения Ф. Клейна ускользнула от внимания исследователей. При этом Ф. Клейн очень близко подошёл к открытию фундаментального закона природы, который предположительно можно сформулировать кратко так:

"свойства физического пространства, и в том числе его размерность, определены исключительными алгебрами".

Исключительных алгебр четыре: Это алгебра действительных чисел, алгебра комплексных чисел, алгебра кватернионов и алгебра октав.

2. Свойства алгебры октав и её подалгебр.

2.1. Общие свойства.

Самой большой исключительной алгеброй является алгебра октав, обозначается как **Ca** (Cayley). Октавы иногда называют также октонионами, а также числами Кэли. Октавы это числа вида

$$Ca=\alpha_0 e+\alpha_1\times i+\alpha_2\times j+\alpha_3\times(ij)+\alpha_4\times k+\alpha_5\times(ik)+\alpha_6\times(jk)+\alpha_7\times(ij)k\ .$$

Где: $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_7$ - - действительные числа.

e –действительная единица алгебры,

i, j, k - мнимые единицы алгебры.

Алгебра октав Ca это восьмимерная алгебра над полем действительных чисел (размерность **m**=8). Она включает в себя подалгебры, а именно

- R алгебру действительных чисел (размерность алгебры m=1),
- C алгебру комплексных чисел (размерность алгебры m=2),
- H алгебру кватернионов (размерность алгебры m=4),

Множества действительных чисел, комплексных чисел, кватернионов и октав, являются телами, в которых допустимы следующие операции:

- операция сложения, а также операция обратная сложению,– вычитание;
- операция умножения, а также операция обратная умножению,– однозначное деление,
- операция сопряжения, а также обратная операция, – повторное сопряжение.

Сложение и умножение в октавах и её подалгебрах связаны законами дистрибутивности. По сложению октавы образуют коммутативную (абелеву) группу. Умножение в октавах не коммутативно и не ассоциативно.

Совокупность октав является неассоциативным, альтернативным телом. Умножение единиц алгебры октав задаётся таблицей умножения

Таблица 1.

$U=U_1\times U_2$

U_1 \ U_2	e	i	j	ij	k	ik	jk	(ij)k
e	e	i	j	ij	k	ik	jk	(ij)k
i	i	- e	ij	-j	ik	-k	-(ij)k	jk
j	j	-ij	- e	i	jk	(ij)k	-k	-ik
ij	ij	j	-i	- e	(ij)k	-jk	ik	-k
k	k	-ik	-jk	-(ij)k	- e	i	j	ij
ik	ik	k	-(ij)k	jk	-i	- e	-ij	j
jk	jk	(ij)k	k	-ik	-j	ij	- e	-i
(ij)k	(ij)k	-jk	i k	k	-ij	-j	i	- e

Алгебра октав Ca и подалгебры R, C, H замкнуты относительно любых операций, допустимых в этих алгебрах. Если рассматривать множества чисел R, C, H и Ca то $R \subset C \subset H \subset Ca$. На рис.4 этот факт схематично изображён.

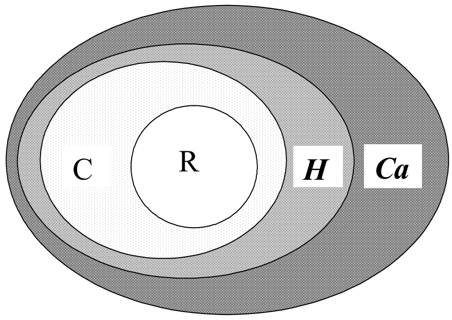

рис.4

Алгебры C, H и Ca по целому набору свойств близки к своей первооснове алгебре R всех действительных чисел. Эта близость проявляется, например, в том, что:

- Алгебры R, C, H – единственные алгебры с ***делением***, в которых умножение обладает свойствами ассоциативности. Это предложение в точной формулировке, носит название теоремы Фробениуса.
- Алгебры R, C, H и Ca – единственные алгебры с ***делением***, в которых справедливы формулы $(uv)v=u(vv)$ и $v(vu)=(vv)u$ (ослабленный вариант ассоциативности, называемый альтернативностью). Это утверждение называется обобщённой теоремой Фробениуса.
- Алгебры R, C, H и Ca – единственные алгебры с ***единицей***, в которых выполняется правило ***"норма произведения равна произведению норм"*** Этот факт составляет содержание теоремы Гурвица.
- Для альтернативных алгебр справедлива теорема Артина, которую в частной формулировке применительно к альтернативному телу октав можно записать так:

  Две не нулевых и не коммутирующих между собой октавы порождают алгебру изоморфную ассоциативному телу кватернионов.

  Эта теорема важна для определения базиса и подпространств в мультивекторных пространствах связанных с алгеброй октав.

2.2. Простейшие функции в алгебре октав и её подалгебрах.

По-новому взглянуть на исследования Ф. Клейна удалось, после того как в [5] было показано, что в исключительных алгебрах R, C, H и Ca существует не одна норма, как было известно, а две взаимосвязанные квадратичные нормы. Каждая из этих норм принимает действительные значения при любых значениях аргумента. Этими нормами являются, ***евклидова норма и лоренцева норма.*** Покажем, как можно получить эти ключевые функции. Сведения о других функциях и их свойствах можно найти в [5].

2.2.1. Функции, связанные с операцией сопряжения.

В алгебрах R, C, H и Ca определена операция сопряжения. Операция сопряжения позволяет выделить действительную часть любого числа z, принадлежащего указанным алгебрам с помощью формулы

$$Re(z)=\tfrac{1}{2}(z+\overline{z}).$$

Операция сопряжения позволяет также выделить мнимую или "векторную" часть любого числа z,

$$Vr(z)=\tfrac{1}{2}(z-\overline{z}).$$

В алгебрах R, C, H и Ca операция сопряжения позволяет каждое число z или функцию, определяющую это число, представить в виде действительной и мнимой части. Например, для произвольного числа $z\in Ca$ эту процедуру можно проделать следующим образом

$$z=\operatorname{Re}(z)+Vr(z)=\tfrac{1}{2}(z+\overline{z})+\tfrac{1}{2}(z-\overline{z})$$

2.2.2. Функции, индуцированные умножением двух чисел.

Элементарной функцией в алгебре октав является произведение двух чисел, эта функция является также простейшей билинейной формой т.е.

$$c=a\times b, \qquad \text{а также} \qquad d=a\times\overline{b}.$$

Разлагая эти элементарные функции на действительную и мнимую часть, можно получить две интересующие нас симметричные билинейные формы, которым в теории векторных пространств соответствуют скалярные произведения. Функциональный квадрат от симметричной билинейной формы является квадратичной формой, которая является нормой.

А). Евклидово скалярное произведение и евклидова норма.

Пусть одно из двух чисел a, $b\in Ca$ входит в произведение сопряженным, например, $d=a\times\overline{b}$. Можно представить это произведение в виде действительной и мнимой части, а именно

$$d=a\times\overline{b}=Re(a\times\overline{b})+Vr(a\times\overline{b})=\tfrac{1}{2}(a\overline{b}+b\overline{a})+\tfrac{1}{2}(a\overline{b}-b\overline{a})=\langle\langle a,b\rangle\rangle+[a,b\rangle\rangle$$

Этим выражением определены две функции, а именно евклидово скалярное произведение $\langle\langle a,b\rangle\rangle$ и евклидово векторное произведение $[a,b\rangle\rangle$.

А.1). ***<u>Евклидово скалярное произведение</u>*** $\langle\langle a,b\rangle\rangle$ это действительная часть произведения двух чисел a и b, причём одно из чисел в произведение входит сопряжённым. Т.е. евклидово скалярное произведение всегда принимает действительное значения.

$$\langle\langle a,b\rangle\rangle=\operatorname{Re}(a\times\overline{b})=\tfrac{1}{2}\left(a\times\overline{b}+b\times\overline{a}\right)$$

или

$$\langle\langle a,b\rangle\rangle = \alpha_0 \times b_0 + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j \times b_j$$

где m – размерность алгебры (m=1, 2, 4, 8);

a , b –числа из множества R или C или H или Ca;

a_j , b_j – действительные величины стоящие перед единицами алгебры (R, C, H, Ca) в разложении чисел a и b.

А.2). ***Евклидова норма***. Функциональный квадрат евклидова скалярного произведения определяет норму. Эта норма, хорошо известна и принимает действительные не отрицательные значения; норма определяется через произведение сопряжённых чисел.

$$\langle\langle a,a\rangle\rangle = Nr(a) = a \times \overline{a} = \overline{a} \times a = \sum_{j=0}^{m-1} a_j^2 \geq 0;$$

В алгебре функция Nr(a) носит название алгебраической нормы. В теории мультивекторных пространств эта функция названа "евклидова норма". Чтобы не использовать новых обозначений, в [5] и в данной работе символ Nr(a) сохранён. В дальнейшем эту норму мы будем стараться называть евклидовой нормой.

Евклидова норма характеризуются сигнатурой $(\underbrace{+,...,+}_{\text{m раз}})$***, где m размерность алгебры.***

Евклидова норма больше нуля при $a \neq 0$ и равна нулю при $a=0$. Именно эту норму имели в виду исследователи, когда утверждали [4] что *"кватернионы не подходят для описания пространства–времени"*

Евклидова норма фигурирует в теореме Гурвица, которая утверждает

алгебры R, C, H и Ca единственные, в которых содержится единица, и евклидова норма произведения чисел равна произведению евклидовых норм сомножителей т.е.

$$Nr(a \times b) = Nr(a) \times Nr(b).$$

Б). Лоренцево скалярное произведение и лоренцева норма.

Кроме общеизвестного евклидова скалярного произведения и евклидовой нормы, в алгебрах R, C, H и Ca существуют Лоренцево скалярное произведение и лоренцева норма [5].

Чтобы получить эти функции необходимо произведение двух чисел $a, b \in Ca$ разложить на действительную и мнимую часть т.е.

$$c = a \times b = \mathrm{Re}(a \times b) + Vr(a \times b) = \tfrac{1}{2}(a \times b + \overline{b} \times \overline{a}) + \tfrac{1}{2}(a \times b - \overline{b} \times \overline{a}) = \langle a,b\rangle + [a,b\rangle$$

Этим выражением определены две функции, а именно лоренцево скалярное произведение $\langle a,b\rangle$ и лоренцево векторное произведение $[a,b\rangle$.

Б.1). ***<u>Лоренцево скалярное произведение</u>*** $\langle a,b\rangle$, это действительная часть произведения двух чисел a и b, т.е. это всегда действительное число

$$\langle a,b\rangle = \mathrm{Re}(a\times b) = \tfrac{1}{2}(a\times b + \bar{b}\times\bar{a})$$

или

$$\langle a,b\rangle = \alpha_0\times b_0 - \sum_{j=1}^{m-1}\alpha_j\times b_j$$

Б.2). ***<u>Лоренцева норма,</u>*** – является функциональным квадратом лоренцева скалярного произведения. Лоренцева норма, – знакопеременная норма, которая принимает действительные значения, и равна сумме квадратов сопряжённых чисел

$$\langle a,a\rangle = Lr(a) = \tfrac{1}{2}(a^2 + \bar{a}^2) = a_0^2 - \sum_{j=1}^{m-1}a_j^2 \,.$$

Для функции Lr(a), использовано название аналогичной функции из работы Пенроуза Р. [3].

Лоренцева норма характеризуются лоренцевой сигнатурой $\boldsymbol{(\underbrace{+,-,\ldots,-}_{m})}$***, где m размерность алгебры октав или её подалгебры.***

Только в исключительных алгебрах R, C, H и Ca существуют операции сложения, умножения и сопряжения, а также соответствующие однозначные обратные операции. Благодаря этим операциям
в исключительных алгебрах однозначно определена норма с лоренцевой сигнатурой, – лоренцева норма. Что позволяет использовать алгебру октав и её подалгебры для описания свойств пространства–времени.

В). Таким образом, мы видим, что в исключительных алгебрах R, C, H и Ca существуют две квадратичные функции (нормы), принимающие всегда действительные значения, а не одна как считалось до появления работы [5].
И каждой из этих норм (евклидовой и лоренцевой) соответствует своя билинейная симметричная форма. Каждая из билинейных форм, в теории векторных пространств, может быть использована как скалярное произведение. Симметричные билинейные формы (скалярные произведения) связаны друг с другом соотношением $\langle\langle a,b\rangle\rangle = \langle a,\bar{b}\rangle$.
Существование двух норм является следствием того, что в исключительных алгебрах сумма и произведение сопряжённых чисел это всегда действительное число.

3. Мультивекторные пространства.

Чтобы воспользоваться фактом существования двух норм в алгебре октав и её подалгебрах, для построения модели физического пространства необходимо ввести понятие векторного пространства, в котором для векторов определена алгебра октав и (или) её подалгебры. Такое векторное пространство названо мультивекторным пространством. Это пространство имеет две нормы одна, из которых положительно определена, а другая является знакопеременной и имеет лоренцеву сигнатуру **(+,–…–)**. Существование знакопеременной нормы (лоренцевой нормы) позволяет использовать исключительные алгебры (R, C, H и Ca), а также связанные с ними векторные пространства для описания свойств пространство–времени.

3.1. Определение мультивекторного пространства.

А). ***Точечным множеством*** называется множество, состоящее из точек.

Б). ***Вектором*** **x=ν(A,B)** в множестве точек называется его подмножество, состоящее из упорядоченной пары точек. Первая точка **A** называется началом вектора, вторая точка **B** называется концом вектора.

В). ***Векторным пространством*** называется множество включающее:

- подмножество векторов, элементами которого являются вектора,
- подмножество функций, соответствующих данному подмножеству векторов.

Векторное пространство называется **связанным** (ассоциированным) с данным точечным пространством.

Тип векторного пространства определяется алгеброй, которая определена для векторов этого векторного пространства. Такой алгеброй может быть, например алгебра линейных пространств или любая из алгебр гиперкомплексных чисел и в том числе алгебра октав.

Г). ***Мультивекторным пространством*** $\mathbf{M_m}$ (далее МП) называется векторное пространство, наделенное операциями сложения, умножения и сопряжения векторов, изоморфное в части этих операций числовому множеству, которое является телом (R или C или H или Ca).

Где:

m – размерность алгебры векторов,

R – тело действительных чисел, размерность алгебры m=1, (МП обозначается $\mathbf{M_1}$);

C – тело комплексных чисел, размерность алгебры m=2, (МП обозначается $\mathbf{M_2}$);

H – тело кватернионов, размерность алгебры m=4, (МП обозначается $\mathbf{M_4}$);

Ca – тело октав, размерность алгебры m=8. (МП обозначается $\mathbf{M_8}$).

3.2. Простейшие свойства мультивекторных пространств.

В МП вектора можно складывать друг с другом и умножать друг на друга в соответствии с правилами соответствующей алгебры. В результате любых операций с векторами получается вектор, принадлежащий этому МП. Таким образом, МП содержит только подмножество векторов и подмножество функций соответствующей алгебры. Числа для действий с векторами не требуются. Однако, следующий из определения изоморфизм множества векторов МП и соответствующего множества чисел, позволяет каждому вектору взаимнооднозначно сопоставить соответствующее число. Поэтому для начертания формул, определяющих функции в МП, удобно могут быть использованы числа, которые взаимнооднозначно соответствуют определённым векторам.

МП не являются изоморфными, какому либо линейному пространству, например, потому что в линейных пространствах не определена операция непосредственного умножения и однозначного деления векторов.

3.3. Подпространства в МП.

Т.к. алгебра октав содержит подалгебры, то и мультивекторное пространство $\mathbf{M_8}$ содержит подпространства. Наибольшим МП является $\mathbf{M_8}$. При этом $\mathbf{M_4}$, $\mathbf{M_2}$, и $\mathbf{M_1}$ являются подпространствами $\mathbf{M_8}$. Т.е. $\mathbf{M_1}\subset\mathbf{M_2}\subset\mathbf{M_4}\subset\mathbf{M_8}$.

3.4. Метрические свойства.

Для векторов МП определена алгебра изоморфная алгебре числового множества, которое является телом. Поэтому для метризации точечного пространства, с которым связано МП, используются определённые в соответствующих алгебрах скалярные произведения и нормы. Причём нет необходимости постулировать существование какой-либо одной метрической формы. Надо использовать все "встроенные" в исключительные алгебры метрические функции, получаемые с помощью любых допустимых в этих алгебрах операций. Т.е. ни каких дополнительных "административных" мер не нужно принимать для согласования множества функций математической модели и множества функций моделируемого объекта, – физического пространства.

- В МП определено евклидово скалярное произведение $\langle\langle a,b\rangle\rangle = \frac{1}{2}\left(a\times\overline{b}+b\times\overline{a}\right)$, которому соответствует положительно определённая евклидова норма $Nr(a)=\langle\langle a,a\rangle\rangle=\overline{a}\times a=\sum_{j=0}^{m-1} a_j^2 \geq 0.$

  В точечном пространстве, с которым связано МП расстояние между двумя точками всегда положительно. Это расстояние равно длине l вектора, которому соответствуют эти точки. Длина вектора определяется формулой $l=\sqrt{Nr(a)}=\| a \|.$

- В МП определено лоренцево скалярное произведение $\langle a,b\rangle = \frac{1}{2}(a\times b+\bar{b}\times\bar{a})$, которому соответствует знакопеременная лоренцева норма $Lr(a)=\langle a,a\rangle=\frac{1}{2}(a^2+\bar{a}^2)=a_0^2-\sum_{j=1}^{m-1}a_j^2$, с лоренцевой сигнатурой. Как это сделано в специальной теории относительности, можно ввести понятие интервала s между двумя точками точечного пространства. Интервал может быть действительной величиной или мнимой. Интервал определяется формулой
$$s=\sqrt{Lr(a)}=|a|.$$

Каждому скалярному произведению соответствует своя симметричная билинейная форма, поэтому эти скалярные произведения коммутативны и дистрибутивны по каждому аргументу. Скалярные произведения и соответствующие им нормы при любых значениях аргументов принимают действительные значения. Ещё раз укажем, что все отмеченные выше метрические функции появляются вследствие существования в принятой алгебре векторов операций сложения, умножения и сопряжения векторов.

3.5. Изотропные векторы.

Важным для приложений является понятие изотропного вектора. Например, свет, обладающий предельной скоростью, распространяется вдоль изотропных направлений.

Изотропным вектором называется вектор, евклидова норма которого не равна нулю, а лоренцева норма равна нулю.

3.6. Ортогональность векторов в МП

Т.к. в МП существует два скалярных произведения, то для векторов определены три вида ортогональности векторов, а именно:

E–ортогональными называются два не нулевых вектора a и b, для которых евклидово скалярное произведение равно нулю, т.е
$$\langle\langle a,b\rangle\rangle=0.$$

E–ортогональность двух векторов означает, что некоторый вектор равный произведению двух векторов, один из которых входит в это произведение сопряжённым (например, $d=a\times\bar{b}$ или $f=\bar{a}\times b$), не имеет действительной составляющей.

L--ортогональными называются два не нулевых вектора a и b, для которых лоренцево скалярное произведение равно нулю,
$$\langle a,b\rangle=0$$

L–ортогональность двух векторов a и b означает, что вектор равный произведению этих векторов (например, $c=a\times b$ или $f=b\times a$) не имеет действительной составляющей.

EL--ортогональными называются два не нулевых вектора a и b, для которых евклидово скалярное произведение и лоренцево скалярное произведение равно нулю, т.е.

$$\langle\langle a,b\rangle\rangle = 0 \qquad \text{и} \qquad \langle a,b\rangle = 0\,.$$

4. Порождающие векторы и базис.

В МП определение базиса пространства отличается от определения базиса в линейных пространствах. Например, для того чтобы задать базис в M_8, имеющий восемь EL–ортогональных векторов требуется только четыре порождающих вектора, удовлетворяющих определённым условиям. Ещё четыре EL–ортогональных вектора получаются умножением порождающих векторов. Это свойство следует из таблицы умножения октав.

Порождающими векторами называются векторы, минимальное количество которых, с помощью допустимых алгебраических операций в МП образует ***базисные векторы***.

Для упрощения формул, определяющих базис МП, удобно использовать комплект из EL–ортогональных нормированных на единицу порождающих векторов. Эти вектора могут быть получены из векторов общего вида с помощью процедур выделения действительной и мнимой составляющей вектора, а также процедуры ортогонализации. Базисные векторы могут быть получены из порождающих путём перемножения порождающих векторов. Число базисных векторов совпадает с размерностью алгебры соответствующего МП.

- Для M_1, в котором "содержаться" действительные вектора, порождающим является любой действительный вектор. Важной процедурой, которая определяет масштабы в МП, является выбор единичного вектора, а также его направления. Единичный вектор, например e,. служит единицей в операции умножения векторов. Вектор e является ***единственным*** нормированным на единицу базисным вектором в M_1.

- Для M_2, порождающими векторами являются ***два*** вектора, а именно один действительный вектор (например e) и один мнимый вектор, (например i). Эти векторы служат базисными векторами M_2. Для удобства применения векторы нормируются на единицу.

- Для M_4, порождающими векторами могут быть нормированные на единицу ***три*** вектора. Один действительный вектор (например, e) и два мнимых EL–ортогональных вектора, (например i и j). Для мнимых векторов должно соблюдаться условие ij−ji≠0, т.е. коммутатор, составленный из векторов, не должен быть равен нулю. Третий мнимый базисный EL−ортогональный вектор получается умножением векторов i и j. Базисными векторами будут четыре вектора: действительный вектор e_0=e, и три мнимых вектора e_1=i, e_2=j, e_3=ij.

- Для M_8, порождающими векторами могут быть нормированные на единицу ***четыре*** вектора. Один действительный вектор (например, e) и три мнимых EL−ортогональных вектора (например, i, j и k). Ассоциатор, составленный из этих векторов, не должен быть равен нулю, т.е. (ij)k−i(jk)≠0. Базисными векторами будут: действительный вектор e_0=e, и семь мнимых векторов e_1=i, e_2=j, e_3=ij, e_4=k, e_5=ik, e_6=jk и e_7=(ij)k.

5. Движения в МП

Преобразования пространства, сохраняющие метрические формы, называются движениями. В МП существуют три вида движений, являющиеся вращениями пространства. Иные движения в работе не рассматриваются.

5.1. ***E − движением*** называются вращение МП, сохраняющее евклидову норму вектора, а также евклидово скалярное произведение. Элементарные линейные преобразования M_8 осуществляющие E−движения этого пространства, можно классифицировать следующим образом:

$q^/ = aq$ − левое преобразование;

$q^/ = qa$ − правое преобразование;

$q^/ = aqa$ − симметричное центральное преобразование,

где:**a**, − вектор (версор) с единичной евклидовой нормой $Nr(a)=1$, осуществляющий преобразование пространства.

5.2. ***EL − движением*** называются вращение МП, сохраняющие одновременно евклидову норму вектора и лоренцеву норму вектора, и соответствующие скалярные произведения. К этим движениям относятся преобразования вида

$q^/ = aq\bar{a}$ − несимметричное центральное преобразование,

где:**a**, − вектор (версор) с единичной евклидовой нормой $Nr(a)=1$, осуществляющий преобразование пространства.

5.3. ***L − движением*** называются вращение МП, сохраняющие лоренцеву норму вектора и лоренцево скалярное произведение.

Это движение эквивалентно преобразованиям Лоренца в линейных пространствах. Этому виду движений посвящён отдельный последующий материал.

6. Движения, сохраняющие лоренцеву норму.

6.1. Система отсчёта.

Для определения L – движений в МП требуется введение дополнительных понятий и определений, а именно понятие системы отсчёта и собственного базиса вектора.

<u>Собственным базисом вектора</u> (например вектора p) называется некоторый базис в котором вектор p не содержит мнимой составляющей.

<u>Системой отсчёта вектора</u> **p** называется совокупность собственных базисов вектора p. Систему отсчёта вектора p обозначим O_P.

6.2. Преобразования Лоренца в МП M_2

Рассмотрим наблюдателя, система отсчёта O_P, которого связана с вектором p. В системе отсчёта O_p вектор p_p выглядит как действительный вектор. Нижний индекс показывает, что вектор p_p наблюдается из системы отсчёта вектора p. Этот действительный вектор задаёт направление действительной оси, на которой в соответствии с отдельной процедурой может быть определён действительный единичный вектор e, имеющий положительное направление.

Пусть наблюдатель выделил из общего МП M_8 некоторый вектор q_p. Действительный вектор p и мнимая составляющая вектора q_p порождают "двумерное" подпространство M_2^{pq}, которое можно связать с комплексной плоскостью. В качестве единичного вектора задающего положительное мнимое направление в подпространстве M_2^{pq} принимается нормированная на единицу мнимая часть вектора q_p. Вектор q_p, породивший это подпространство и принадлежащий этому подпространству, можно записать в виде

$$q_p = \tfrac{1}{2}(q_p + \bar{q}_p)\times e_p + \tfrac{1}{2}\| q_p - \bar{q}_p \|\times i_{pq},$$

Мнимая единица i_{pq} подпространства M_2^{pq} равна $i_{pq} = (q_p - \bar{q}_p) \big/ \|q_p - \bar{q}_p\|$. Удобна параметрическая форма представления вектора q_p. для этого используется действительный параметр скорости β вектора, определяемый по формуле $\beta = \|q_p - \bar{q}_p\| \big/ (q_p + \bar{q}_p)$. В параметрической форме вектор q_p будет определяться соотношением

$$q_p = \| q \| \left(\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} \times e_p + \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \times i_{pq} \right).$$

Лоренцева норма вектора q_p также может быть определена через параметры β и $Nr(q_o)$, т.е.

$$Lr(q_p) = Nr(q_p) \times \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} \; .$$

Пусть наблюдатель переместился из системы отсчёта O_P в систему отсчёта O_q . Спрашивается, как при этом изменится вид векторов из подпространства M_2^{pq}.

Пусть вектор x_p произвольный вектор из подпространства M_2^{pq}. Вектор x_p в системе отсчёта O_P записывается как $x_p=x_{p0}\times e_p+x_{p1}\times i_{pq}$. Тот же вектор в системе отсчёта O_q (вектора q) записывается как $x_q=x_{q0}\times e_q+x_{q1}\times i_{qp}$. При этом нужно учитывать что $e_p\neq e_q$ и $i_{pq}\neq i_{qp}$ т.к. различные системы отсчёта порождаются различными и в общем случае не совпадающими векторами.

Формула, определяющая преобразование вектора x при переходе из системы отсчёта O_P в систему отсчёта O_q , эквивалентная преобразованиям Лоренца в линейных пространствах записывается следующим образом

$$x_q = \frac{x_{p0} - \beta x_{p1}}{\pm\sqrt{1-\beta^2}} \times e_q - \frac{\beta x_{p0} - x_{p1}}{\pm\sqrt{1-\beta^2}} \times i_{qp} \, .$$

Это преобразование является L–движением и действует это преобразование в подпространстве M_2, которому соответствует комплексная плоскость. При переходе на комплексной плоскости из системы отсчёта O_P в систему отсчёта O_q , величина лоренцевой нормы каждого вектора рассматриваемого подпространства сохраняется. Именно на этом условии основан вывод приводимой формулы. Подробный вывод содержится в [5].

Замечание.

Параметр скорости β, некоторого вектора x_p может изменяться в пределах $-\infty\leq\beta\leq+\infty$. Однако переход, из системы отсчёта O_P в систему отсчёта O_q связанную с некоторым вектором q_p с помощью формул L–движения, возможен только в том случае если параметр скорости β вектора q_p, определяющего систему отсчёта O_q, удовлетворяет условию $\|\beta\|\leq 1$.

6.3. Преобразования Лоренца в МП M_8

Более сложные зависимости, определяют L–движения в МП M_4 и M_8 . Подробный вывод формул содержится в [5]. В данной работе приводятся только конечные формулы.

Пусть происходит переход из системы отсчёта O_p в систему отсчёта O_q. В системе отсчёта O_p рассматривается вектор $z_p \in M_8$ общего вида, такой что $z_p q_p - q_p z_p \neq 0$ (коммутатор векторов z_p и q_p не равен нулю), т.е. этот вектор на принадлежит целиком подпространству M_2^{pq}. Необходимо определить вид вектора z_q в системе отсчёта O_q. по известным его параметрам из системы O_p.

Для получения общих формул L–движения вектор z_p можно разложить следующим образом

$$z_p = \mathrm{Re}(z_p) + Vr(z_p) = z_{p0} \times e_p + z_{p1} \times k_{pz} \quad (25),$$

Действительная часть вектора z_p равна

$$\mathrm{Re}(z_p) = \tfrac{1}{2}\left(z_p + \overline{z}_p\right) = z_{p0} \times e_p$$

Мнимая часть вектора z_p равна

$$Vr(z_p) = \tfrac{1}{2}\left(z_p - \overline{z}_p\right) = \tfrac{1}{2} \| z_p - \overline{z}_p \| \times \frac{\left(z_p - \overline{z}_p\right)}{\| z_p - \overline{z}_p \|} = z_{p1} \times k_{pz} .$$

Где обозначено

$$z_{p1} = \tfrac{1}{2} \| z_p - \overline{z}_p \| \quad \text{и} \quad k_{pz} = \frac{z_p - \overline{z}_p}{\| z_p - \overline{z}_p \|} .$$

Вектор k_{pz} является мнимым, при этом $Nr(k_{pz})=1$, $Lr(k_{pz})=-1$.

Необходимые формулы L–движения в мультивекторном пространстве M_8 получаются, если разложить мнимую компоненту вектора $z_{p1} \times k_{pz}$ на две составляющие:

- на компоненту пропорциональную мнимой части вектора q_p , лежащую в подпространстве M_2^{pq};
- на компоненту EL–ортогональную к мнимой части вектора q_p, ортогональную подпространству M_2^{pq}.

Для разложения на составляющие используется процедура ортогонализации приведенная в [5]. После процедуры ортогонализации произвольный вектор z_p, принадлежащий МП M_8. В системе отсчёта O_P можно записать в виде двух составляющих, а именно

$$z_p = \left(z_{p0}\times e_p + z_{p1}\times m\times i_{pq}\right) + z_{p1}\times\left\|\sqrt{1-m^2}\right\|\times n_{pz} \quad .$$

В этой формуле введены обозначения:

$m = \langle\langle k_{pz}, i_{pq}\rangle\rangle = \cos(k_{pz} \wedge i_{pq}) = \cos(\psi)$ –косинус угла между мнимыми единичными векторами k_{pz} и i_{pq};

$n_{pz} = \dfrac{k_{pz} - \langle\langle k_{pz}, i_{pq}\rangle\rangle\times i_{pq}}{\left\|k_{pz} - \langle\langle k_{pz}, i_{pq}\rangle\rangle\times i_{pq}\right\|} = \dfrac{k_{pz} - m\times i_{pq}}{\left\|\sqrt{1-m^2}\right\|}$ – мнимый вектор с единичной евклидовой нормой и отрицательной единичной лоренцевой нормой, EL–ортогональный вектору i_{pq}.

Составляющая $z_{p0}\times e_p + z_{p1}\times m\times i_{pq}$ вектора z_p, записанная в скобках, принадлежит подпространству M_2^{pq} и преобразуется по формуле приведенной ранее для подпространства M_2^{pq}. Составляющая $z_{p1}\times\left\|\sqrt{1-m^2}\right\|\times n_{pz}$, в направлении вектора n_{pz} EL–ортогональна подпространству M_2^{pq}, т.е. эта составляющая ортогональна любому вектору из подпространства M_2^{pq}, и в том числе к вектору Vr(q_p).. И как показано в [5] векторы, ортогональные к подпространству M_2^{pq}, не изменяют при L–движении таких параметров как ортогональность, а также величина евклидовой и лоренцевой нормы. В итоге для вектора общего вида z_q можно записать формулу преобразования, позволяющую определить его составляющие в системе отсчёта O_q по известным составляющим из системы отсчёта O_p

$$z_q = \frac{z_{p0} - \beta m z_{p1}}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}\times e_q - \frac{\beta z_{p0} - m z_{p1}}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}\times i_{qp} + z_{p1}\times\left\|\sqrt{1-m^2}\right\|\times n_{qz} .$$

Область применения формулы всё мультивекторное пространство M_8.

Вектор z_p можно записать, используя в качестве действительных параметров евклидову длину вектора z_p и параметр скорости этого вектора, а именно

$$z_p = \| z_p \| \times \left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \times e_p + \frac{\alpha \times m}{\sqrt{1+\alpha^2}} \times i_{pq} + \frac{\alpha \times \left\| \sqrt{1-m^2} \right\|}{\sqrt{1+\alpha^2}} \times n_{pz} \right).$$

$\alpha = \dfrac{\| z_p - \bar{z}_p \|}{z_p + \bar{z}_p}$ параметр скорости вектора z_p.

При использовании параметра скорости вектора z_p, формула перехода из системы отсчёта O_p в систему отсчёта O_q запишется в виде,

$$z_q = \frac{\| z_p \|}{\sqrt{1+\alpha^2}} \times \left(\frac{1-\beta m \alpha}{\pm\sqrt{1-\beta^2}} \times e_q - \frac{\beta - m\alpha}{\pm\sqrt{1-\beta^2}} \times i_{qp} + \alpha \times \left\| \sqrt{1-m^2} \right\| \times n_{qz} \right)$$

Приведенные формулы эквивалентны формулам, полученным Герглотцем для четырёхмерного пространства–времени. Однако имеется различие, заключающееся в том, что данные формулы справедливы для пространства, в котором действует восьмимерная алгебра октав. При этом нужно отметить следующий качественно новый результат:

> векторы i_{qp} и n_{qz} являются мнимыми, EL–ортогональными и имеют единичную евклидову норму. Вектор q после перехода в систему отсчёта O_q стал действительным. Вектору q стал соответствовать единичный действительный вектор e_q. Эти векторы (e_q, i_{qp} и n_{qz}) порождают подпространство M_4. Это означает что
>
> ***преобразование, с помощью формул L–движения, любого вектора из "восьмимерного" пространства M_8 происходит всегда в "четырёхмерном" подпространстве M_4, алгебра векторов в котором изоморфна алгебре кватернионов. Т.е. любое общее вращение пространства, осуществляемое L–движением, происходит всегда в "четырёхмерном" подпространстве.***

Этот вывод в применении к физическому пространству означает, что неискушённый наблюдатель может видеть всегда только трёхмерное пространство. При любом перемещении наблюдателя его трёхмерное подпространство изменяется и поворачивается в соответствии с формулами L–движения, но всегда это только трёхмерное подпространство. Дополнительные четыре пространственных измерения скрыты от наблюдателя т.к. ортогональны к его трёхмерному подпространству. Действительная составляющая (время) всегда ортогональна мнимым (пространственным) измерениям и поэтому также не наблюдаема визуально.

7. Основные свойства вращений.

7.1. E–движение не переводит изотропный вектор в изотропный, и. не сохраняет множество изотропных векторов МП. E–движение связывает два МП с различными системами изотропных векторов.

7.2. EL–движение позволяет осуществить переход от одного собственного базиса к другому собственному базису в пределах одной системы отсчёта, без изменения множества изотропных векторов МП.

7.3. L–движение позволяет, не изменяя множества изотропных векторов МП, перейти из одной системы отсчёта связанной с каким либо вектором p к другой системе отсчёта, связанной с другим вектором например q.

Если переходить на язык физической модели, то формулы L–движения (преобразования Лоренца) позволяют перейти из неподвижной системы отсчёта в движущуюся со скоростью β систему отсчета. Движущаяся система отсчёта оказывается повёрнутой (в "восьмимерном" пространстве) относительно неподвижной системы отсчёта на некоторый угол. При малых скоростях (малых значениях β) этот угол примерно равен $\approx \frac{1}{2}\beta^2$. Точную формулу для угла поворота можно найти в [5].

8. Размерность МП и число степеней свободы точки.

Разработанный в [5] подход к разработке модели физического пространства позволяет по-новому определить размерность пространства и жёстко связать это фундаментальное свойство с размерностью алгебры векторов. Определение размерности мультивекторных пространств в отличие от линейных пространств имеет более сложную структуру. В смысле линейных пространств все мультивекторные пространства одномерны, т.е. в мультивекторных пространствах может существовать только один линейно независимый вектор. Различаются мультивекторные пространства числом свободы отдельно взятой точки точечного пространства, с которым связано мультивекторное пространство. Число свободы точки равно числу действительных параметров необходимых для задания координат точки. Это число равно размерности, исключительной алгебры векторов мультивекторного пространства, связанного с данным точечным пространством, и ограничено числами **1, 2, 4, 8**. В точечном пространстве, с которым связано M_8, число свободы точки равно восьми.

Замечание.

В линейном векторном пространстве, размерность определяется числом существующих в этом пространстве линейно независимых векторов. Автор математической модели выбирает это число исходя из некоторой целесообразности. Математических ограничений на число измерений нет. Например, в модели Минковского размерность пространства равна четырём, в теории Калуцы размерность пространства принята равной пяти, в теории суперструн оперируют одиннадцатимерным пространством.

10. Основные результаты.

Кроме математических применений разработанную теорию МП можно использовать в качестве математической модели физического пространства. Помимо известных эффектов специальной теории относительности, например таких как "сокращения длин отрезков при движении", "замедление времени при движении", "релятивистский эффект Доплера", модель физического пространства, использующая теорию мультивекторных пространств (ТМП), указывают на новые, неизвестные свойства физического пространства и позволяет по-новому с геометрических позиций объяснить известные экспериментальные факты.

10.1. ТМП предсказывает существование восьми EL – ортогональных направлений, это одно действительное направление, которому можно сопоставить время, и семь пространственных (мнимых) направлений. Визуально наблюдатель воспринимает только три пространственных "измерения", а с помощью приборов фиксирует действительное "измерение", – время. Алгебра векторов в этом "четырёхмерном" пространстве–времени изоморфна алгебре кватернионов. Действительное измерение (время) ортогонально к пространственным составляющим и поэтому не наблюдаемо визуально. Другие четыре, пространственные измерения также не наблюдаемы т.к. являются ортогональными к трёхмерному пространству наблюдателя. Алгебра векторов в "восьмимерном" пространстве–времени изоморфна альтернативной алгебре октав.

10.2. В "восьмимерном" пространстве–времени существуют изотропные направления при движении, по которым скорость равна предельной скорости. Изотропные направления могут содержать (или не содержать) составляющие, которые ортогональны видимому трёхмерному пространству, которое воспринимает наблюдатель. Скорость движения по изотропному направлению, целиком принадлежащему видимому трёхмерному пространству, равна предельной скорости и равна скорости света. Кажущаяся скорость движения по изотропному направлению, содержащему составляющие, которые ортогональны видимому трёхмерному пространству, может изменяться от нуля до предельной величины.

10.3. Для внешнего наблюдателя, в системе отсчёта связанной с изотропным вектором, время останавливается. Т.е. возмущение пространства, двигающееся по изотропному направлению, будет выглядеть как некоторое стабильное образование или частица с бесконечно большим временем жизни. При этом если движение целиком происходит в видимом трёхмерном подпространстве наблюдателя, то такое движение будет иметь предельную скорость, а частицей может быть, например фотон, не имеющий массы покоя. Если движение возмущения происходит по изотропному направлению ортогональному видимому трёхмерному пространству наблюдателя, то такое возмущение идентифицируется наблюдателем как стабильная частица, которая может иметь нулевую скорость, например как электрон или позитрон. Складывается парадоксальная ситуация: движение в ортогональном видимому трёхмерному пространству направлении наблюдатель зафиксировать не может. Он не видит траектории движения, даже если это движение происходит с предельной скоростью. Однако наблюдатель фиксирует существование в точке, в которой происходит ортогональное движение, объекта, со свойствами позволяющими отделить этот объект от невозмущённого пространства.

Почему электроны в атомах (например, в атоме водорода) не излучают. С точки зрения ТМП ответ на этот вопрос может быть таким: электроны в атоме продолжают перемещаться по изотропным направлениям. При движении по изотропному направлению время, для внешнего наблюдателя останавливается, и ни какие процессы наблюдать невозможно кроме движения с предельной скоростью.

10.4. Движение отдельных возмущений в "восьмимерном" пространстве может происходить навстречу друг другу. Если это движение происходит в видимом трёхмерном пространстве, то наблюдатель фиксирует встречное движение, например двух фотонов. Если встречное движение происходит в ортогональном видимому пространству направлении, то наблюдатель фиксирует частицу и античастицу, например электрон и позитрон. При этом знак электрического заряда электрона и позитрона – определяется направлением движения в ортогональном направлении по отношению к подпространству наблюдателя.

Считается, что фотон нейтральная частица и поэтому не имеет античастицы. Однако если следовать приведенным рассуждениям ***фотон и антифотон*** – это два фотона, движущиеся в противоположных направлениях в наблюдаемом трёхмерном пространстве.

10.5. ТМП позволяет трактовать стабильные частицы как волновые возмущения восьмимерного пространства–времени, распространяющиеся ортогонально видимому трёхмерному подпространству наблюдателя. Как следствие такой трактовки, при перемещении этих волновых образований в видимом трёхмерном пространстве должен проявляться эффект Доплера. У частиц при их движении должны фиксироваться волновые свойства, и эти волны действительно существуют это волны де Бройля. При трактовке волн де Бройля как проявления эффекта Доплера при движении волны по изотропному направлению, ортогонально видимому трёхмерному пространству, с кажущейся скоростью больше нуля, в [5] получена формула

$$\lambda = \frac{h\left(1 + w\sqrt{1 - w^2}\right)}{m_0 \times w}.$$

При малой, в сравнении со скоростью света, кажущейся скорости $w<<1$ соотношение переходит в известную формулу де Бройля т.е.

$$\lambda = \frac{h}{m_0 \times w},$$

где:

h – постоянная Планка,

λ–длина волны, регистрируемая в видимом трёхмерном пространстве,

w – кажущаяся скорость движения волны (частицы) в видимом трёхмерном пространстве,

$\mathbf{m_0}$ – масса частицы, пропорциональная её энергии.

Регистрация у движущихся частиц волновых свойств (волн де Бройля) может служить свидетельством того, что частицы являются волнами, распространяющимися ортогонально к наблюдаемому трёхмерному пространству. При этом все явления могут быть объяснены распространением и взаимодействием волн. А концепция так называемого корпускулярно–волнового дуализма становится излишней. Это шаг навстречу квантовой теории поля.

11. Сравнение свойств физического пространства и его модели.

Реальное физическое пространство и математическое точечное пространство, с которым связаны мультивекторные пространства, это различные множества. Для того чтобы оценить справедливость описания физического пространства с помощью методов МП, необходима некоторая процедура сравнения указанных множеств, а также объектов принадлежащих этим множествам и их свойств. Такую процедуру сопоставления свойств даёт понятие изоморфизма множеств.

Необходимо рассмотреть изоморфизм двух сложно устроенных множеств.

- Первое множество это модельное (математическое) точечное пространство, с которым связано мультивекторное пространство.
- Второе множество это физическое пространство.

Нужно выяснить существование в физическом пространстве точек и векторов. После этого можно установить изоморфизм алгебраических операций с векторами в физическом пространстве и мультивекторном пространстве. Фактически необходимо проверить существование в физическом пространстве операций сложения и умножения векторов, получения сопряжённого вектора, а также законов связывающих эти операции. Все остальные свойства физического пространства можно будет получить из его модели автоматически.

Положительный результат сравнения множеств (пространств) на уровне объектов и алгебраических операций, а также сравнение следствий из математической модели, использующей теорию МП, с наблюдаемыми в физическом пространстве явлениями, позволят утвердиться в точности, разработанной математической модели.

Заключение.

Математический аппарат мультивекторных пространств, построенный на алгебраической основе, позволяет перейти к описанию пространства с "размерностью" восемь и по-новому взглянуть на аспекты создания единой теории поля. Помимо качественно нового определения "размерности", в мультивекторных пространствах однозначно задана метрика. Метрика в мультивекторных пространствах не постулируется, а становится выводимой из алгебраических свойств этих пространств. Причём из алгебраических свойств мультивекторных пространств следует, что эта метрика единственно возможная. Необходимо отметить, что более сложная метрика мультивекторных пространств включает, как часть своих общих метрических свойств, знакопеременную метрику Минковского.

Существующие модели описывают физическое пространство в большом диапазоне масштабов, от галактик до субатомных частиц. К наиболее известным теориям относятся: специальная теория относительности, общая теория относительности и квантовая теория поля. Эти теории существенно различаются как математическим аппаратом, так и принципами, заложенными в основу этих теорий. Существует много предложений по объединению этих теорий в одну общую теорию. Однако такая общая теория до настоящего времени не создана, т.к. физическое пространство устроено сложнее разработанных математических моделей. Можно предположить, что модель физического пространства, построенная с применением теории мультивекторных пространств, позволит приблизиться к пониманию проблемы.

Литература.

1. Klein F. "Uber die geometrische Grundlagen der Lorentzgrupp", Mai 1910. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1910, pp 281–300.
2. Клейн Ф. "Элементарная математика с точки зрения высшей". т.1. Пер. с нем. изд. 1924г. Д.А. Крыжановского под ред. В.Г. Болтянского М.," Наука" ФМ, 1987.
3. Пенроуз Р. и Риндлер В. "Спиноры и пространство – время". Пер. с англ. , М, "Мир", 1987г
4. Пенроуз Р. "Путь к реальности или законы, управляющие вселенной. Полный путеводитель" Пер. с англ. М.– Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика" 2007.
5. Кубышкин Е.И. "Нелинейная алгебра пространства–времени" М., Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2009. 304с.