Преобразования Лоренца в комплексных числах, кватернионах и октавах.

Кубышкин Е.И. **июнь 2013г.**

1. Введение.

Исследования [6], [7], [8] векторных пространств, в которых алгебра векторов это алгебра октав, сделали возможной точку зрения на пространство-время и материю как на проявление одной фундаментальной сущности, а именно как на бесконечное множество однотипных бесконечно малых движущихся точек, составляющих непрерывную среду. При этом векторы, связанные с точками пространства-времени, образуют векторное пространство, в котором действует алгебра октав. Подобный взгляд на вещи закрепляется формулировкой "***основной гипотезы"***, постулирующей фундаментальные свойства окружающего нас физического пространства. Вот эта формулировка:

Пространство-время это бесконечная непрерывная среда, в которой отсутствуют источники и стоки, а геометрия и свойства определяются алгеброй октав. При этом все наблюдаемые формы материи, и процессы результат движения этой среды.

Принципиальным и важным вопросом, который был решён при разработке этой гипотезы, явился вопрос о метрических свойствах пространства-времени. Как показали исследования [6], метрические свойства пространства-времени в математической модели [8], в основе которой лежит восьмимерная алгебра октав, не постулируются, а выводятся из этой алгебры.

Во многих математических моделях 4х мерного пространства-времени, например, специальной теории относительности (СТО), для описания метрических свойств используется экспериментально подтверждённая знакопеременная квадратичная форма

$$\Delta S^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 ,$$

где: S интервал, t время, а x, y, z координаты.

Эта форма преобразуется, при изменении системы отсчёта, но её структура (сигнатура) сохраняется. Преобразования пространства, сохраняющие величину интервала и структуру знакопеременной квадратичной формы, являются преобразованиями Лоренца. Метрику пространства-времени с указанной знакопеременной формой часто называют метрикой Минковского. А 4х мерное пространство-время с постулированной метрикой Минковского пространством Минковского.

В работе [6], показано, что в октавах существуют знакопеременная метрическая форма и соответствующие этой форме преобразования, эквивалентные преобразованиям Лоренца. Поэтому определение ведущей роли алгебры октав в "основной гипотезе" является обоснованным. В указанной работе описан метод, с помощью которого получены формулы вращения октавного пространства эквивалентные преобразованиям Лоренца. Полученные формулы действительны не только для алгебры октав, но и для её подалгебр: для кватернионов и комплексных чисел.

Однако как показало обсуждение полученных результатов, существует необходимость разъяснить отличия разработанного метода получения преобразований Лоренца от уже известных методов, к которым имеются замечания, а также показать корректность разработанного метода.

2. Скалярные произведения и квадратичные нормы в комплексных числах, кватернионах и октавах.

A. Для получения формул эквивалентных формулам преобразований Лоренца в октавах и связанных с ними векторных пространствах приведём некоторые начальные сведения об этой алгебре и функциях существующих в ней.

- Множество октав (Ca) является не ассоциативным, но альтернативным телом, и содержат подмножества, которые также являются телами. Это поле действительных чисел (R), поле комплексных чисел (C) и ассоциативное и не коммутативное тело кватернионов (H). Алгебры этих чисел имеют размерность m. При этом m=1 для действительных чисел; m=2 для комплексных чисел; m=4 для кватернионов; m=8 для октав. Алгебра с меньшей размерностью является подалгеброй алгебры с большей размерностью.
- Число z из алгебры R, C, H или Ca это число вида

$z = a_0 e_0 + \sum_{j=1}^{m-1} a_j e_j$, где: a_0, a_i- действительные числа; e_i – единицы алгебры.

Каждому числу z соответствует сопряжённое число $\overline{z} = a_0 e_0 - \sum_{j=1}^{m-1} a_j e_j$.

- В алгебре отав Ca и её подалгебрах существуют зависимости, позволяющие выделить действительную Re(a) и мнимую Vr(a) часть числа a,

$$\mathrm{Re}(a) = \tfrac{1}{2}(a + \overline{a}), \qquad Vr(a) = \tfrac{1}{2}(a - \overline{a}).$$

- В алгебрах R, C, H и Ca. определены функции одного и двух аргументов, всегда принимающие действительные значения. Это симметричные билинейные функции и связанные с ними квадратичные функции.

<u>Симметричной билинейной функцией</u> называется функция линейная по каждому аргументу, и для которой при любых x, y справедливо равенство [2]

$$B(x, y) = B(y, x).$$

Основные свойства симметричной билинейной функции приведены в таблице 1.

таблица 1

	Свойство	Наименование
I	$B(a,b) = B(b,a)$	коммутативность
II	$B(a+b,c) = B(a,c) + B(b,c)$	дистрибутивность
III	$B(\lambda a,b) = \lambda B(b,a)$	однородность

Здесь: a, b, c – любые числа алгебры октав или её подалгебры.

$\lambda \in$ R – действительное число

<u>Квадратичная функция</u> $Q(x)=B(x,x)$ может быть сопоставлена каждой билинейной функции $B(x,y)$, если положить x=y. Из свойств билинейных функций следует

$$Q(\lambda x)=B(\lambda x,\lambda x)=\lambda^2 Q(x),\quad \text{где: } x\in Ca \text{ и } \lambda\in R.$$

Коммутативность и дистрибутивность симметричных билинейных функций делает возможным найти связь с соответствующей квадратичной функцией. Эта зависимость определяется формулой, которая позволяет восстановить симметричную билинейную функцию по заданной квадратичной функции,

$$B(a,b)=\tfrac{1}{2}\Big(Q(a+b)-Q(a)-Q(b)\Big)\ .$$

Симметричные билинейные функции в теории векторных пространств используются в качестве скалярных произведений. А квадратичные функции определяют нормы векторов.

B. Евклидово скалярное произведение и евклидова норма.

Для определения норм, существующих в октавном пространстве, мы воспользуемся известным евклидовым скалярным произведением [4] стр. 128.

<u>Евклидово скалярное произведение</u> $\langle\langle a,b\rangle\rangle$ определяется как действительная часть произведения числа $a\in Ca$ на сопряжённое число $b\in Ca$, т.е.

$$\langle\langle a,b\rangle\rangle=\mathrm{Re}(a\bar{b})=\tfrac{1}{2}\left(a\bar{b}+b\bar{a}\right)=a_0b_0+\sum_{j=1}^{m-1}a_jb_j\ .$$

Евклидово скалярное произведение является симметричной билинейной функцией, которая всегда принимает действительные значения. Этой функции соответствует квадратичная функция, которая определяет евклидову норму.

<u>Евклидова норма</u>, является функциональным квадратом евклидова скалярного произведения

$$Nr(a)=\langle\langle a,a\rangle\rangle=a\bar{a}=\bar{a}a=\sum_{j=0}^{m-1}a_j^2\geq 0.$$

Эта норма равна произведению сопряжённых чисел, всегда принимает действительные не отрицательные значения и хорошо известна.

- Евклидова норма характеризуются сигнатурой $\underbrace{(+,...,+)}_{m}$, где m размерность алгебры.

- Т.к. число $a\in Ca$ равно $a=\mathrm{Re}(a)+Vr(a)$, то евклидова норма числа a равна разности квадратов действительной и мнимой части числа, т.е.

$$Nr(a)=\mathrm{Re}^2(a)-Vr^2(a)\ .$$

- Модуль числа a (или длина вектора a, если рассматривается векторное пространство) определяется выражением $\|a\|=\sqrt{Nr(a)}$.

- Евклидова норма фигурирует в теореме Гурвица, в соответствии с которой: ***алгебры* R, C, H *и* Ca *единственные, в которых содержится единица, и евклидова норма произведения чисел равна произведению евклидовых норм сомножителей т.е.***

$$Nr(ab) = Nr(a)Nr(b).$$

C. Лоренцево скалярное произведение и лоренцева норма.

Вторым скалярным произведением, существующим в алгебре октав и её подалгебрах, является лоренцево скалярное произведение [6]. На существование лоренцева скалярного произведения в комплексных числах указано в [11].

<u>Лоренцево скалярное произведение</u> $\langle a,b\rangle$ можно определить через известное евклидово скалярное произведение, в котором один из операндов входит своим сопряжённым значением, а именно

$$\langle a,b\rangle = \langle\langle a,\overline{b}\rangle\rangle = \mathrm{Re}(ab) = \tfrac{1}{2}\left(ab+\overline{b}\,\overline{a}\right) = a_0b_0 - \sum_{j=1}^{m-1} a_jb_j \quad .$$

Т.е. лоренцево скалярное произведение является сопряжённой формой знакомого евклидова скалярного произведения. Также как и евклидово скалярное произведение его сопряжённая форма, (лоренцево скалярное произведение), является симметричной билинейной функцией, которая обладает коммутативностью, дистрибутивностью, однородностью и всегда принимает действительные значения.

<u>Лоренцева норма</u>, – является функциональным квадратом лоренцева скалярного произведения. Это знакопеременная квадратичная норма, принимающая действительные значения, равная половине суммы квадратов сопряжённых чисел

$$Lr(a) = \langle a,a\rangle = \tfrac{1}{2}(a^2 + \overline{a}^2) = a_0^2 - \sum_{j=1}^{m-1} a_j^2\,;$$

- Лоренцева норма характеризуются сигнатурой $\underbrace{(+,-,\ldots,-)}_{m}$, где m размерность алгебры.

  Лоренцева норма имеет сигнатуру необходимую для описания экспериментально регистрируемых метрических свойств пространства-времени.

- Т.к. число a∈Ca можно представить в виде a=Re(a)+Vr(a), то лоренцева норма равна сумме квадратов действительной и мнимой части числа

$$Lr(a) = \mathrm{Re}^2(a) + Vr^2(a).$$

- Интервал, аналогичный интервалу в специальной теории относительности, определяется выражением $|a| = \sqrt{Lr(a)}$. Интервал может быть действительным, нулевым или мнимым.

Из сказанного следует, что в исключительных алгебрах R, C, H и Ca существуют две квадратичные нормы, принимающие всегда действительные значения, а не одна. Этими нормами являются лоренцева норма и евклидова норма. Каждой из этих норм соответствует своё скалярное произведение.

3. Мультивекторные пространства.

Метод получения преобразований Лоренца в октавах, использует геометрические свойства векторного пространства, в котором для векторов определена алгебра октав или какая-либо её подалгебра. Такое векторное пространство названо мультивекторным пространством [6]. Метрические свойства этого пространства определяются двумя нормами: положительно определённой евклидовой нормой и знакопеременной лоренцевой нормой.

Для определения мультивекторного пространства рассмотрим бесконечное множество, элементами которого являются точки.

Вектором $x=\overrightarrow{AB}$ в множестве точек называется его подмножество, состоящее из упорядоченной пары точек. Первая точка A называется началом вектора, вторая точка B называется концом вектора.

Векторным пространством называется множество включающее:

- подмножество векторов, элементами которого являются векторы,
- подмножество функций, соответствующих данному подмножеству векторов.

Векторное пространство называется **связанным** (ассоциированным) с данным точечным пространством. **Тип векторного пространства** определяется алгеброй, которая определена для векторов этого векторного пространства. Такой алгеброй может быть, например алгебра линейных пространств или любая из алгебр гиперкомплексных чисел и в том числе алгебра октав.

Мультивекторным пространством M_m (далее МП) называется векторное пространство, наделенное операциями сложения, умножения и сопряжения векторов, изоморфное в части этих операций алгебраическим операциям в числовых множествах R, C, H или Ca. МП обозначаются:

M_1 – МП, в котором алгебра векторов изоморфна алгебре поля действительных чисел R; размерность алгебры $m=1$,

M_2 – МП, в котором алгебра векторов изоморфна алгебре поля комплексных чисел C; размерность алгебры $m=2$,

M_4 – МП, в котором алгебра изоморфна алгебре тела кватернионов H; размерность алгебры $m=4$,

M_8 – МП, в котором алгебра векторов изоморфна алгебре тела октав Ca; размерность алгебры $m=8$,

В МП векторы можно складывать друг с другом и умножать друг на друга в соответствии с правилами соответствующей алгебры. В результате любых операций с векторами получается вектор, принадлежащий этому МП. Таким образом, МП содержит только подмножество векторов и подмножество функций соответствующей алгебры. Числа для действий с векторами не требуются. Однако, следующий из определения изоморфизм множества векторов МП и соответствующего множества чисел, позволяет каждому вектору взаимнооднозначно сопоставить соответствующее число. Поэтому для начертания формул, определяющих функции в МП, удобно могут быть использованы числа, которые взаимнооднозначно соответствуют определённым векторам.

4. Вращения в мультивекторных пространствах.

В алгебре октав и её подалгебрах метрические функции задаются двумя квадратичными нормами. Т.е. метрика в октавных векторных пространствах имеет более сложное строение в сравнении с метрикой Минковского. При этом обозначенные две нормы определяют преобразования, являющиеся вращениями. В октавном пространстве и его подпространствах существуют три вида вращений сохраняющих нормы вектора. Вращения можно классифицировать по типу сохраняемой нормы [6]:

E*–движением* называется вращение мультивекторного пространства, сохраняющее евклидову норму вектора, а также евклидово скалярное произведение двух векторов. Элементарные линейные преобразования октавного мультивекторного пространства M_8, осуществляющие E–движения этого пространства, можно классифицировать следующим образом:

$q^/ = aq$ – левое преобразование;

$q^/ = qa$ – правое преобразование;

$q^/ = aqa$ – симметричное центральное преобразование,

где: a, – вектор с единичной евклидовой нормой $Nr(a) = 1$,

осуществляющий преобразование пространства.

Если $Nr(a) \neq 1$, то преобразование происходит с масштабированием пространства. При E–движении и при условии $Nr(a) = 1$ сохраняется евклидова норма и разность квадратов действительной и мнимой части вектора [6].

EL*–движением* называется вращение мультивекторного пространства, сохраняющее одновременно евклидову норму вектора и лоренцеву норму вектора, и соответствующие скалярные произведения. Этому движению соответствует преобразование:

$q^/ = aq\bar{a}$ – несимметричное центральное преобразование,

где: a, – вектор с единичной евклидовой нормой $Nr(a) = 1$.

Сохраняющимися величинами при EL–движении также являются действительная часть вектора, и квадрат мнимой части вектора. Сохраняется евклидова норма действительной части вектора, и евклидова норма мнимой части вектора.

L*–движением* называется вращение мультивекторного пространства, сохраняющее лоренцеву норму вектора и лоренцево скалярное произведение двух векторов. Сохранение лоренцевой нормы вектора при L–движении, влечёт сохранение суммы квадратов действительной и мнимой части вектора [6]. Подробно свойства L–движений рассмотрены в последующем материале.

5. О возможности преобразований Лоренца в кватернионах.

A. Приведенные формулы E–движения и EL–движения опираются на уже известные результаты и не вызывают возражений. Однако обсуждение L–движения показало, что существует определённое сомнение относительно того, как это движение можно получить и может ли такое движение существовать в алгебре октав и её подалгебрах. По-видимому, эти сомнения, прежде всего, связаны с неудовлетворительными попытками получить преобразования Лоренца в кватернионах, которые стали фактором, ограничивающим применение алгебры кватернионов для описания пространства-времени. В [9]: указано:

> *"кватернионы не подходят для описания пространства-времени, так как естественная для кватернионов квадратичная форма* $q\bar{q}=t^2+u^2+v^2+w^2$*, с точки зрения теории относительности, имеет неправильную сигнатуру".*

Чтобы понять истоки такой оценки рассмотрим известные методы описания поворотов в кватернионном пространстве. Со ссылкой на [5] укажем, что формула, полученная Кэли в 1854г. даёт преобразование поворотов и растяжений пространства, связанного с кватернионами, в виде

$$q' = aqb \quad (1),$$

где: a, q, b кватернионы.

В формуле (1) q кватернион исходный. После умножения на кватернионы a и b, кватернион q преобразуется в кватернион q'.

В изложении настоящей работы, кватернионному пространству соответствует МП M_4. Поэтому преобразование (1) возможно только для мультивекторного пространства M_4 или M_2. В МП M_8, в связи с не ассоциативностью алгебры октав, необходимо указать порядок умножения на векторы a и b т.е. в преобразовании (1) нужно расставить скобки. После расстановки скобок, преобразование (1) для M_8 сводится к преобразованиям справедливым для E–движения и EL–движения, приведенных в разделе 4.

Рассмотрим детально преобразование вектора вида (1) в кватернионном пространстве M_4. Это преобразование можно записать следующим образом

$$q' = aqb = ||a|| \cdot ||b|| \frac{a}{||a||}\, q\, \frac{b}{||b||} = M\, \underline{a}\; q\; \underline{b},$$

где: $M=||a||\cdot||b||$ – масштабный множитель;

$\underline{a}$, $\underline{b}$ кватернионы с единичной евклидовой нормой.

В соответствии с теоремой Гурвица в ***алгебрах*** R, C, H ***и*** Ca ***евклидова норма произведения равна произведению евклидовых норм сомножителей.*** Поэтому

$$Nr(q') = M^2 \cdot Nr(q)$$

Если масштабный множитель равен единице $M=1$ то евклидова норма преобразованного кватерниона при преобразовании вида (1) не изменяется. Т.е. сохраняется разность квадратов действительной и мнимой части преобразуемого кватерниона. Если $M\neq1$ то указанная разность квадратов изменяется по величине, но получить сумму квадратов из разности квадратов изменением одного только масштабного множителя невозможно. Т.е. нельзя получить лоренцеву норму, которая равна сумме квадратов действительной и мнимой части. В связи, с чем преобразование (1) не может содержать формул L–движения.

B. Специальным случаем преобразования (1) является преобразование вида,

$$q^{/}=aq\overline{a} \qquad \text{при} \qquad Nr(a)=1 \qquad (2).$$

Преобразование (2) не изменяет действительную часть вектора из МП M_2, M_4 и M_8, а также не изменяет квадрат мнимой части вектора. Это можно показать, представив вектор q в виде суммы действительной и мнимой части т.е.

$$q^{/}=aq\overline{a}=a\operatorname{Re}(q)\overline{a}+aVr(q)\overline{a}.$$

После преобразования, составляющая $aVr(q)\overline{a}$ остаётся мнимой т.к.

$$\operatorname{Re}(a(Vr(q)\overline{a})=\tfrac{1}{2}(aVr(q)\overline{a}+\overline{aVr(q)\overline{a}})=\tfrac{1}{2}(aVr(q)\overline{a}-aVr(q)\overline{a})=0.$$

Т.е. действительная составляющая преобразованного вектора $q^{/}$ целиком определяется выражением

$$a\operatorname{Re}(q)\overline{a}=a\,\overline{a}\,\operatorname{Re}(q)=\operatorname{Re}(q)=\operatorname{Re}(q^{/}) .$$

Таким образом, действительная часть преобразованного вектора $q^{/}$ равна действительной части вектора q. Из полученных равенств следует, что преобразование вида (2) не изменяет действительную часть вектора q, а мнимая часть вектора q преобразуется в мнимую часть вектора $q^{/}$. Поэтому евклидова норма действительной части и мнимой части вектора q не изменяется

$$Nr(\operatorname{Re}(q))=Nr(\operatorname{Re}(q^{/}))=\operatorname{Re}^2(q)=\operatorname{Re}^2(q^{\cdot}),$$

$$Nr\Big(a(Vr(q))\overline{a}\Big)=Nr\Big(Vr(q)\Big)=Nr\Big(Vr(q^{/})\Big)=-Vr^2(q)=-Vr^2(q^{/}).$$

Т.к. квадраты действительной и мнимой части вектора при преобразовании (2) не изменились, то сохранилась как разность, так и сумма квадратов действительной и мнимой части. Т.е. сохранилась не только евклидова норма, но и лоренцева норма вектора. В классификации приведенной в разделе 4 преобразование (2) соответствует EL–движению. Преобразование (2) действительно не только для кватернионов, но и для октав, алгебра которых альтернативна. В соответствии с теоремой Артина [3] в альтернативной алгебре алгебра двух порождающих ассоциативна, поэтому формулу (2) для октав можно писать без скобок.

То, что преобразование вида (2) не является преобразованием Лоренца, хорошо показывает применение этого преобразования к векторам из МП M_2, алгебра векторов в котором это алгебра комплексных чисел, и является подалгеброй алгебры кватернионов. Умножение в поле комплексных чисел коммутативно, поэтому если векторы $a\in M_2$ и $q\in M_2$ и $Nr(a)=1$, то из (2) получается тождество, которое не является преобразованием Лоренца

$$q^{/}=aq\overline{a}=a\overline{a}q=q .$$

C. Подводя итог краткого анализа можно отметить, что преобразования кватернионного пространства вида $q^{/}=aqb$ не содержат преобразований эквивалентных преобразованиям Лоренца. Преобразования Лоренца требуют сохранения лоренцевой нормы, что соответствует сохранению суммы квадратов действительной и мнимой части вектора.

D. В отдельную группу методов получения преобразования Лоренца можно отнести методы, рассматривающие так называемые гиперболические вращения пространства, использующие формальную технику кватернионов [5], [12], [13], [14]. Для описания сути метода приведем выдержку из работы [5] Ф. Клейна.

Как известно под преобразованием Лоренца понимают такую линейную однородную подстановку (с действительными коэффициентами) трёх координат в пространстве x, y, z *и времени* t:

$$x^{/}=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (C7)$$

$$t^{/}=a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}t$$

которая преобразует квадратичную форму $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ *(где* c *есть скорость света) в себя, так что*

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=(x^{/})^2+(y^{/})^2+(z^{/})^2-c^2(t^{/})^2, \quad (C8)$$

и у которой последний коэффициент

$$\frac{dt^{/}}{dt}==a_{44}>0. \qquad (C9)$$

При этом ради краткости не принято во внимание могущее иметь место смещение начальной точки $x=y=z=t=0$. *Оказывается, что в исчислении кватернионов легко можно указать такую подстановку, которая удовлетворяет условию (С8), если только на первое время оставить без внимания требование действительности коэффициентов и неравенство (С9). Для этого нужно рассматривать такие кватернионы, компонентами которых являются не действительные, а обыкновенные комплексные числа, образованные с помощью обыкновенной мнимой единицы* $\sqrt{-1}$ *(которую следует отличать от специальных единиц исчисления кватернионов i, j, k.) Заметим, прежде всего, что кватернионы*

$$q=\sqrt{-1}\cdot ct+ix+jy+kz$$

$$q^{/}=\sqrt{-1}\cdot ct^{/}+ix^{/}+jy^{/}+kz^{/} \qquad (C10)$$

имеют своими модулями квадратные корни из квадратичных форм (С8). Поэтому можно точно также, как выше доказать, что формула

$$q^{/}=\frac{pq\pi}{M}$$

описывает линейную подстановку, удовлетворяющее условию (С8), если p *и* π*–произвольные кватернионы с комплексными коэффициентами, а* M *квадратный корень из произведения их модулей.*
Чтобы получить действительные коэффициенты и удовлетворить условию (С9), надо в качестве p *и* π *взять специально подобранные сопряжённые кватернионы..."*

Метод, использующий кватернионы с комплексными коэффициентами, был предложен Ф. Клейном в 1910 г [13]. С математической точки зрения предложения Ф. Клейна корректны, но выходят за пределы стандартной алгебры кватернионов. Несмотря на теоретическую возможность такого подхода этот способ не нашёл применения т.к. метод Минковского использующий алгебру линейных пространств оказался нагляднее и удобнее. Методами аналогичными методу Ф Клейна являются методы [12] и [14]. В [12] используется матричное представление кватернионов с комплексными коэффициентами.

Существует критика использования кватернионов с комплексными коэффициентами. В [10] Пенроуз заметил

> *"...кватернионы связаны с положительно определёнными формами, тогда как спин-матрица и преобразования Лоренца характеризуются лоренцевой сигнатурой (+, –, –, –). Конечно указанную трудность можно обойти путём введения кватернионов с надлежащими комплексными коэффициентами. Подобные объекты не будут обладать фундаментальными свойствами действительных кватернионов, т.е. не будут образовывать алгебру с делением".*

6. Обозначения и определения необходимые для получения зависимостей определяющих L–движения.

Для того чтобы получить в МП преобразования, сохраняющие лоренцеву норму, необходимо ввести дополнительные определения и обозначения.

A. Введём понятия собственного базиса вектора и системы отсчёта вектора.

- ***Собственным базисом*** некоторого вектора p называется базис в котором вектор p, мультивекторного пространства, не содержит мнимой составляющей.
- ***Системой отсчёта*** O_p некоторого вектора p называется совокупность собственных базисов вектора p.

Совокупность собственных базисов вектора образует класс. Две системы отсчёта связанные с разными векторами будут эквивалентны, если в каждой из систем отсчёта некоторый не нулевой вектор (например, p) является действительным (т.е. не имеет мнимой составляющей). Если вектор q в системе отсчёта вектора p не имеет мнимой составляющей, то системы отсчёта векторов p и q эквивалентны. Мы будем отождествлять систему отсчёта вектора и систему отсчёта связанную с вектором.

В неизменной системе отсчёта, переход от одного собственного базиса вектора к другому собственному базису того же вектора, может быть осуществлён с помощью EL–движения. EL–движение сохраняет действительную часть вектора, а также квадрат мнимой части вектора. Т.к. EL–движение сохраняет без изменения действительную часть вектора, то не нарушает систему отсчета, которая определяется действительным вектором.

L–движение в мультивекторном пространстве позволяет перейти к другой системе отсчёта.

Замечание.

Понятие системы отсчёта вектора, не связано с понятием инерциальной системы отсчёта присутствующей в постулатах Эйнштейна. Это разные понятия.

B. Пусть существуют векторы a, b, c,.... p. С каждым из этих векторов связана своя система отсчёта, а именно O_a, O_b, O_c,..... O_p. Если мы наблюдаем, из какой либо системы отсчёта (например, O_b) за совокупностью перечисленных векторов, то наблюдаемая картина отличается от видимой картины тех же векторов, но наблюдаемой из другой системы отсчёта например O_c, или O_a. Чтобы отразить эту разницу, воспользуемся нижним индексом в обозначениях векторов. Первый нижний индекс будет обозначать систему отсчёта того вектора, из системы отсчёта которого мы наблюдаем за данным вектором. Таким образом если наблюдение ведётся из системы отсчёта вектора p то векторы примут обозначение a_P, b_P, c_P, p_P. Т.е. первый нижний индекс указывает на действительный вектор, из системы отсчёта которого ведётся наблюдение. Обозначение вектора без нижнего индекса указывает на то, что данный вектор, не привязан к какой либо конкретной системе отсчёта.

C. Подчёркивание вектора снизу (например $\underline{a}_P$) обозначает, что вектор нормирован на единицу, т.е. его евклидова норма равна единице.

D. В собственном базисе вектор не содержит мнимой составляющей и является действительным. Это означает, что если за некоторым вектором p_P мы наблюдаем из системы отсчёта O_p то этот вектор является действительным. Т.е. вектор нижний индекс, которого совпадает с обозначением самого вектора, является действительным. Поэтому векторы a_a, b_b, c_c,... p_P являются действительными векторами.

При изучении мультивекторного пространства необходимо выбирать, с помощью некоторой процедуры, размер и направление единичного действительного вектора. Этот действительный вектор будет играть роль единицы в операции умножения векторов, будет задавать эталон длины и направление действительной оси координат.

Чтобы явно показать существование единичного действительного вектора, задающего некоторую систему отсчета, и наглядно записывать формулы, обозначим единичный действительный вектор в системе отсчета O_p как $e_p = \underline{p}_p$. Т.е. вектор e_p это нормированный на единицу вектор $\underline{p}_p$, задающий систему отсчёта. Единичный действительный вектор в другой системе отсчета, например O_b , будет обозначен $e_b = \underline{b}_b$ и т.д.

Предупреждение.

Несмотря на то, что некоторые векторы, например e_p и e_b, являются действительными векторами, и каждый в своей системе отсчёта имеет единичную евклидову норму, это ***различные векторы не равные друг другу т.к. принадлежат различным системам отсчёта.***

E. Пусть задана система отсчёта O_p вектора p в которой вектор p является действительным вектором.

- Совокупность действительных векторов в системе отсчёта O_p образует подпространство M_1. Чтобы показать что данное конкретное подпространство M_1 наблюдается нами из системы отсчёта вектора p обозначим это подпространство как M_1^p. Первый верхний индекс в обозначении подпространства указывает на действительный вектор, задающий систему отсчёта.
- Пока мы, находясь в конкретной системе отсчета (например, в системе отсчёта O_p), не выбрали из окружающего мультивекторного пространства M_8 какой либо вектор с мнимой составляющей, мнимое направление не задано. Для задания мнимого направления, необходимо в системе отсчёта O_p выбрать некоторый вектор $q_P \in M_8$, содержащий мнимую составляющую. Конкретное мультивекторное подпространство, порождённое действительным вектором p и мнимой составляющей вектора $q_P \in M_8$ обозначим символом M_2^{pq}. В принятом обозначении мультивекторного подпространства M_2, на первом месте в верхнем индексе стоит действительный вектор, задающий систему отсчёта. Вторым вектором в верхнем индексе является вектор q_P содержащий мнимую составляющую и порождающий данное подпространство M_2. Алгебра векторов в подпространстве M_2^{pq} изоморфна алгебре комплексных чисел.

Отметим, что подпространства M_2^{pq} и M_2^{qp} не совпадают, это различные подпространства.

F. В обозначениях векторов, наряду с буквенными обозначениями в нижнем индексе, будут употребляться буквы в сочетании с цифрами, например $q_p = q_{p0} e_p + q_{p1} i_{pq}$. В этой формуле векторы q_{p0} и q_{p1} являются действительными векторами, выполняющими роль коэффициентов при ортах разложения вектора q_p. В нижнем индексе первая буква обозначает принадлежность к системе отчёта (в данном случае O_p). Цифра 0, следующая за буквой, используется при коэффициенте действительной составляющей вектора. Цифры $1, \ldots, 7$, следующие за буквой в нижнем индексе, принадлежат коэффициентам при мнимых составляющих вектора.

G. Вектор общего вида q_p в системе отсчёта O_p может быть представлен как сумма действительной и мнимой составляющей

$$q_p = \operatorname{Re}(q_p) + Vr(q_p) = \tfrac{1}{2}(q_p + \overline{q}_p) + \tfrac{1}{2}(q_p - \overline{q}_p).$$

Вектор q_p порождает подпространство M_2^{pq}. Мнимая единица подпространства M_2^{pq} задаётся мнимой составляющей вектора, q_p. Эту мнимую единицу обозначим i_{pq} и определим её формулой

$$i_{pq} = (q_p - \overline{q}_p) \big/ \|q_p - \overline{q}_p\|.$$

В обозначении мнимой единицы i_{pq} подпространства M_2^{pq}, в качестве первого нижнего индекса принимается обозначение действительного вектора, задающего систему отсчёта O_p (в данном случае p). Второй нижний индекс указывает на вектор, мнимая составляющая которого задаёт эту мнимую единицу (в данном случае q).

Вектор q_p в системе отсчёта O_p можно представить в виде

$$q_p = \tfrac{1}{2}(q_p + \overline{q}_p)\, e_p + \tfrac{1}{2}\|q_p - \overline{q}_p\| \frac{q_p - \overline{q}_p}{\|q_p - \overline{q}_p\|} = \\ = \tfrac{1}{2}(q_p + \overline{q}_p)\, e_p + \tfrac{1}{2}\|q_p - \overline{q}_p\|\, i_{pq} .$$

Учитывая, что величины $\frac{1}{2}(q_p + \overline{q}_p)$ и $\frac{1}{2}\|q_p - \overline{q}_p\|$ являются действительными величинами, удобно ввести параметрическую форму представления вектора, где используются параметры

$$\beta = \frac{\|q_p - \overline{q}_p\|}{q_p + \overline{q}_p} \quad \text{и} \quad Nr(q_p) = \|q_p\|^2,$$

где: β – параметр скорости вектора q_p .

С использованием параметров β и $Nr(q_p)$ можно определить вектор $\underline{q}_p$ с единичной евклидовой нормой, совпадающий по направлению с вектором q_p, а именно

$$\underline{q}_p = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}\, e_p + \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\, i_{pq} .$$

Соответственно вектор q_p будет определяться соотношением

$$q_p = \|q_p\| \left(\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}\, e_p + \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\, i_{pq} \right) .$$

Лоренцева норма вектора q_p также может быть определена через параметры β и $Nr(q_p)$, т.е.

$$Lr(q_p) = Nr(q_p)\, \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} .$$

Из формулы следует: при $\beta^2=1$ лоренцева норма равна нулю. Вектор q_p для которого $Lr(q_p)=0$ называется **изотропным**. Изотропные векторы определяют изотропные направления в МП. При $\beta^2>1$ лоренцева норма вектора q_p становится отрицательной.

7. Сохранение скалярных произведений при движениях.

A. До последнего времени считалось, что вращения кватернионного пространства вида (1) являются единственно возможными и других вращений кватернионы не допускают, однако это не так. Время идет, и появляются новые идеи. Открытие наличия в алгебрах R, C, H и Ca лоренцевой нормы наряду с евклидовой нормой указало на возможность существования преобразований сохраняющих лоренцеву норму (L–движений). Геометрические методы анализа мультивекторных пространств позволили получить L–движения с помощью стандартного аппарата алгебры октав Ca [6]. При этом полученные преобразования оказались эквивалентными преобразованиям Лоренца и не совпадающими с преобразованиями вида $q^{/} = aqb$.

Мы ввели понятие системы отсчёта. В неэквивалентных системах отсчёта вид одного и того же вектора различен. Изменяется, в том числе вид векторов, которые задают координатные оси. Например, действительный вектор при смене системы отсчёта переходит в вектор общего вида, который содержит мнимую составляющую. У чисто мнимого вектора при смене системы отсчёта появляется действительная составляющая. Т.е. в неэквивалентных системах отсчёта координатные векторы различны. Поэтому нельзя сложить (умножить) вектор из одной системы отсчёта с другим вектором, но из неэквивалентной системы отсчёта. Можно производить операции сложения и умножения с векторами, принадлежащими только эквивалентным системам отсчёта. В этом состоит принципиальное ограничение преобразования $q^{/} = aqb$, в котором все векторы должны быть из эквивалентных систем отсчёта.

B. В [1] стр. 31 приводится ключевая лемма, позволяющая получить связь между векторами в двух неэквивалентных системах отсчёта при L–движениях. Эта лемма доказывает, что при L–движениях сохраняется не только лоренцева норма вектора, но и лоренцево скалярное произведение векторов. Это обстоятельство позволяет получить в мультивекторных пространствах преобразования векторов эквивалентные преобразованиям Лоренца.

В рассматриваемом варианте леммы ***постулируется*** утверждение:

> **В мультивекторном пространстве M_m существует преобразование (L–движение), сохраняющее лоренцеву норму каждого вектора, при переходе из одной системы отсчёта в другую.**

Этот постулат позволяет получить множество следствий и в том числе формулы, эквивалентные преобразованиям Лоренца.

Рассмотрим три произвольные точки X, Y, Z (рис.1) из точечного пространства, связанного с мультивекторным пространством M_m. Определим для каждой пары точек вектор и обозначим:

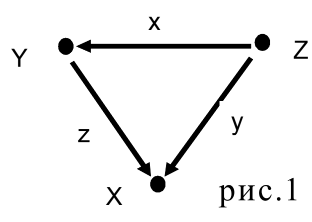

рис.1

$$x = \overrightarrow{ZY}\,,\ y = \overrightarrow{ZX}\,,\ z = \overrightarrow{YX}\,.$$

Векторы x, y и z наблюдаются из двух систем отсчёта Q_p и Q_q. Обозначим эти векторы в системе отсчёта Q_p как x_p, y_p и z_p, а в системе отсчёта Q_q как x_q, y_q и z_q. В соответствии с принятым постулатом должно выполняться равенство

$$Lr(x_p) = Lr(x_q).$$

Из рис.1 для двух систем отсчёта Q_p и Q_q следует, что $x_p = y_p - z_p$ и $x_q = y_q - z_q$, поэтому

$$Lr(y_p - z_p) = Lr(y_q - z_q).$$

Лоренцева норма выражается через лоренцево скалярное произведение поэтому

$$Lr(y_p - z_p) = \langle y_p - z_p, y_p - z_p \rangle = Lr(y_q - z_q) = \langle y_q - z_q, y_q - z_q \rangle.$$

Учитывая коммутативность и дистрибутивность лоренцева скалярного произведения, получим

$$\langle y_p, y_p \rangle - 2\langle y_p, z_p \rangle + \langle z_p, z_p \rangle = \langle y_q, y_q \rangle - 2\langle y_q, z_q \rangle + \langle z_q, z_q \rangle.$$

При этом

$$\langle y_p, y_p \rangle = Lr(y_p), \quad \langle y_q, y_q \rangle = Lr(y_q),$$
$$\langle z_p, z_p \rangle = Lr(z_p), \quad \langle z_q, z_q \rangle = Lr(z_q).$$

Так как L–движение, сохраняет лоренцеву норму вектора, то

$Lr(y_p) = Lr(y_q)$, а также $Lr(z_p) = Lr(z_q)$.

После сокращений следует равенство

$$\langle y_p, z_p \rangle = \langle y_q, z_q \rangle.$$

Полученное равенство показывает:

> **при L–движении, которое осуществляет переход из одной системы отсчёта в другую, сохраняется не только величина лоренцевой нормы каждого вектора, но и величина лоренцева скалярного произведения двух произвольных векторов.**

Аналогично можно показать, что при E–движении сохраняется евклидово скалярное произведение. А при EL–движении одновременно сохраняется евклидово и лоренцево скалярное произведение.

8. L–движение в мультивекторном пространстве M_2.

A. В системе отсчёта O_P вектор p не имеет мнимой компоненты и его можно отождествить с действительной осью координат. Выберем из мультивекторного пространства M_8 вектор q_p, содержащий мнимую составляющую. Действительная составляющая вектора p и мнимая составляющая вектора q_p порождает подпространство M_2^{pq}, алгебра векторов в котором изоморфна алгебре комплексных чисел. Это подпространство является минимальным, в котором существуют нетривиальные зависимости, определяющие L–движение. С вектором q, связана система отсчёта O_q, в которой он выглядит как действительный вектор. В системе отсчёта O_q точка зрения с которой наблюдается вектор p отличается от точки зрения на вектор p в системе отсчёта O_p. И у вектора p в системе отсчёта O_q наблюдается мнимая составляющая. В системе отсчёта O_p существует подпространство M_2^{pq} порожденное мнимой составляющей вектора q_p. Соответственно, в системе отсчёта O_q существует подпространство M_2^{qp}, порожденное мнимой составляющей вектора p_q. Подпространства M_2^{pq} и M_2^{qp} не совпадают т.к. имеют различные единичные действительный и мнимый векторы, играющие роль осей координат. Системы отсчёта O_p и O_q не являются эквивалентными. Один и тот же вектор в каждом из этих подпространств выглядит различно.

Для того чтобы определить некоторый вектор x в системах отсчёта O_p и O_q необходимо в этих системах отсчета задать векторы, исполняющие роль реперов. Затем, используя лоренцево скалярное произведение, которое сохраняется при L–движении (раздел 7) можно определить составляющие вектора x относительно заданных реперов в системах отсчёта O_p и O_q.

Первый репер это вектор q, к системе отсчёта которого мы переходим. Про вектор q известно, что по условию, в системе отсчёта O_q он переходит в вектор q_q, который не содержит мнимой составляющей, поэтому:

если в системе отсчёта O_p вектор q имеет вид $q_p = q_{p0}e_p + q_{p1}i_{pq}$,

то в системе отсчёта O_q вектор q перейдёт в вектор $q_q = q_{q0}e_q + 0i_{qp}$.

Где обозначено $i_{pq} = (q_p - \overline{q}_p) \big/ \|q_p - \overline{q}_p\|$ и $i_{qp} = (p_q - \overline{p}_q) \big/ \|p_q - \overline{p}_q\|$

При этом $e_p \neq e_q$ и $i_{pq} \neq i_{qp}$.

Второй репер это L–ортогональный к вектору q_p вектор r_p. Вектор r_p в системе отсчёта O_q переходит в мнимый вектор r_q, который не имеет действительной составляющей. Вектор r_q в системе отсчёта O_q является мнимым потому, что L–движение сохраняет лоренцево скалярное произведение и переводит L–ортогональную пару векторов q_p и r_p в L–ортогональную пару векторов q_q и r_q. Мы по условию переходим в систему отсчёта O_q вектора q, в которой вектор q_q является действительным, соответственно:

вектор r_q является мнимым (без действительной составляющей) т.к. в подпространстве M_2^{qp} существует только один L–ортогональный вектор к действительному вектору q_q .

Таким образом

если в системе отсчёта O_p вектор r_p имел вид $r_p = r_{p0}e_p + r_{p1}i_{pq}$,

то в системе отсчёта O_q он перейдёт в вектор $r_q = 0e_q + r_{q1}i_{qp}$.

На рис.2 и рис.3 показана трансформация векторов p_p, q_p и r_p при переходе из системы отсчёта O_p в систему отсчёта O_q.

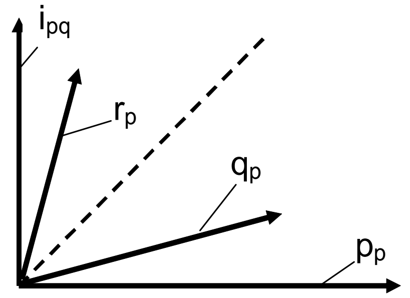

рис. 2. Система отсчёта Qp

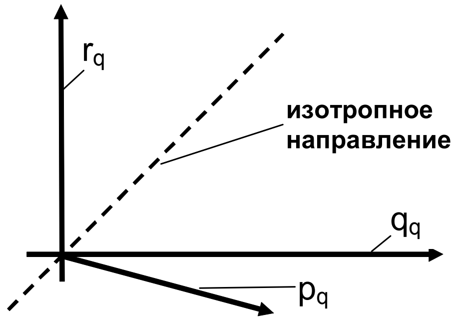

рис. 3. Система отсчёта Qq

Рассмотрим произвольный вектор x из пространства M_8, который одновременно наблюдается из подпространства M_2^{pq} (система отсчёта O_P) и подпространства M_2^{qp} (система отсчёта O_q). При L–движении лоренцево скалярное произведение двух любых векторов сохраняется. Поэтому, находя лоренцево скалярное произведение вектора x относительно векторов реперов в двух системах отсчёта, можно получить формулы, связывающие составляющие вектора x в этих системах отсчёта

$$\left|\begin{array}{l}\langle x_p, q_p\rangle = \langle x_q, q_q\rangle \\ \langle x_p, r_p\rangle = \langle x_q, r_q\rangle\end{array}\right. \qquad (3)\ .$$

Формулы (3) действительны для любого вектора $x \in M_8$. Однако вначале рассмотрим случай, когда вектор целиком лежит в подпространстве M_2^{pq}. В этом случае вектор x в системе отсчёта O_P записывается как

$$x_p = x_{p0} e_p + x_{p1} i_{pq}\,.$$

Тот же вектор x в системе отсчёта O_q записывается как

$$x_q = x_{q0} e_q + x_{q1} i_{qp}\ .$$

Когда вектор $x \in M_8$ целиком лежит в подпространстве M_2^{pq} можно легко раскрыть формулы (3), а именно

$$\left|\begin{array}{l}\langle x_p, q_p\rangle = x_{p0} q_{p0} - x_{p1} q_{p1} = x_{q0} q_{q0} = \langle x_q, q_q\rangle \\ \langle x_p, r_p\rangle = x_{p0} r_{p0} - x_{p1} r_{p1} = -x_{q1} r_{q1} = \langle x_q, r_q\rangle\end{array}\right. \qquad (4).$$

Используя (4), можно определить вектор x_q в системе отсчёта O_q, через известные лоренцевы скалярные произведения в системе отсчёта O_p

$$x_q = x_{q0} e_q + x_{q1} i_{qp} = \frac{\langle x_p, q_p\rangle}{q_{q0}} e_q - \frac{\langle x_p, r_p\rangle}{r_{q1}} i_{qp} \qquad (5).$$

Формулы (4) позволяют также определить значения составляющих векторов реперов q_{q0}, и r_{q1} в системе отсчёта O_q. Для этого достаточно использовать вместо произвольного вектора x векторы q_p и r_p, подставляя их в соответствующие формулы т.е.

$$\begin{cases}\langle q_p, q_p\rangle = Lr(q_p) = q_{q0}q_{q0} = Lr(q_q)\\ \langle r_p, r_p\rangle = Lr(r_p) = -r_{q1}r_{q1} = Lr(r_q)\end{cases} \quad (6).$$

Из (6) получаются значения составляющих q_{q0} и r_{q1} векторов реперов в системе отсчёта O_q через известные лоренцевы скалярные произведения в системе отсчёта O_p

$$\begin{cases}q_{q0} = \pm\sqrt{Lr(q_p)}\\ r_{q1} = \pm\sqrt{-Lr(r_p)}\end{cases} \quad (7).$$

Подставляя значения q_{q0} и r_{q1} из (7) в (4) и (5) получаются искомые составляющие вектора x.

$$\begin{cases}x_{q0} = \dfrac{\langle x_p, q_p\rangle}{q_{q0}} = \dfrac{\langle x_p, q_p\rangle}{\pm\sqrt{Lr(q_p)}} = \dfrac{\langle x_p, \underline{q}_p\rangle}{\pm\sqrt{Lr(\underline{q}_p)}} = \dfrac{x_{p0}\underline{q}_{p0} - x_{p1}\underline{q}_{p1}}{\pm\sqrt{Lr(\underline{q}_p)}},\\ x_{q1} = -\dfrac{\langle x_p, r_p\rangle}{r_{q1}} = -\dfrac{\langle x_p, r_p\rangle}{\pm\sqrt{-Lr(r_p)}} = -\dfrac{\langle x, \underline{r}_p\rangle}{\pm\sqrt{-Lr(\underline{r}_p)}} = -\dfrac{x_{p0}\underline{r}_{p0} - x_{p1}\underline{r}_{p1}}{\pm\sqrt{-Lr(\underline{r}_p)}}\end{cases} \quad (8).$$

При этом для упрощения дальнейших выкладок, в (8) использованы векторы реперы с единичной евклидовой нормой $\underline{q}_p$ и $\underline{r}_p$. Направление этих векторов совпадает с направлением векторов реперов q_p и r_p.

Для системы отсчёта O_P, приведём формулы для двух L–ортогональных векторов реперов $\underline{q}_p$ и $\underline{r}_p$ с единичной евклидовой нормой [6]. Приведём также значение лоренцевой нормы этих векторов.

$$\begin{cases}\underline{q}_p = \dfrac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}e_p + \dfrac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}i_{pq}, \quad Nr(\underline{q}_p) = 1, \quad Lr(\underline{q}_p) = \dfrac{1-\beta^2}{1+\beta^2},\\ \underline{r}_p = \dfrac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}e_p + \dfrac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}i_{pq}, \quad Nr(\underline{r}_p) = 1, \quad Lr(\underline{r}_p) = \dfrac{\beta^2-1}{1+\beta^2}\end{cases} \quad (9).$$

То, что векторы $\underline{q}_p$ и $\underline{r}_p$ имеют единичную евклидову норму и являются L–ортогональными, проверяется подстановкой составляющих этих векторов в формулу для евклидовой нормы и в формулу для лоренцева скалярного произведения приведенных в разделе 2 настоящей статьи.

Из (9) получаются значения составляющих векторов реперов $\underline{q}_p$ и $\underline{r}_p$ в системе отсчёта O_P , а именно

$$\underline{q}_{p0} = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}, \quad \underline{q}_{p1} = \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}, \quad \underline{r}_{p0} = \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}, \quad \underline{r}_{p1} = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} \quad (10),$$

где: β параметр скорости вектора q_p.

Подставляя лоренцевы нормы из (9) и составляющие (10) в формулы (8) для параметров вектора x_q в системе отсчёта O_q , а затем подставляя полученные выражения в (5), получим формулу, определяющую преобразование вектора x при переходе из системы отсчёта O_P в систему отсчёта O_q. Это преобразование является искомым L–движением, сохраняющим лоренцеву норму вектора x_p.

$$x_q = \frac{x_{p0} - \beta x_{p1}}{\pm\sqrt{1-\beta^2}} e_q - \frac{\beta x_{p0} - x_{p1}}{\pm\sqrt{1-\beta^2}} i_{qp} \qquad (11).$$

Полученная зависимость (11) эквивалентна преобразованиям Лоренца в двухмерном пространстве с метрикой Минковского.

Используя формулу (11) можно проверить, что вектор x сохранил при переходе из системы отсчёта Q_p в систему отсчёта Q_q свою лоренцеву норму,

$$Lr(x_p) = x_{p0}^2 - x_{p1}^2,$$

$$Lr(x_q) = x_{q0}^2 - x_{q1}^2 = \left(\frac{x_{p0} - \beta x_{p1}}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 - \left(\frac{\beta x_{p0} - x_{p1}}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 = x_{p0}^2 - x_{p1}^2 = Lr(x_p).$$

B. Формула (11), позволяет получить формулу обратного преобразования, по которой можно определить вектор x_p в системе отсчёта вектора p по заданным составляющим вектора x_q из системы отчёта вектора q. Т.е. вектор x_p в подпространстве M_2^{pq} можно определить по его известным составляющим из подпространства M_2^{qp}. Необходимая формула получается путём определения составляющих x_{p0} и x_{p1} из уравнения (11) т.е.

$$x_{q0} = \frac{x_{p0} - \beta x_{p1}}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad x_{q1} = \frac{x_{p1} - \beta x_{p0}}{\pm\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (12).$$

Находя из двух уравнений (12) составляющие вектора x_{p0} и x_{p1}, можно определить вектор x_p по его известным проекциям из другой системы отсчёта (системы отсчёта O_q связанной с вектором q) т.е.

$$x_p = \frac{x_{q0} + \beta x_{q1}}{\pm\sqrt{1-\beta^2}} e_p + \frac{\beta x_{q0} + x_{q1}}{\pm\sqrt{1-\beta^2}} i_{pq} \qquad (13).$$

Формула (13) отличается от формулы (11) заменой ортов EL–ортогонального базиса и заменой β на $-\beta$.

9. Преобразования Лоренца в МП M_8.

Геометрический подход позволяет получить зависимости для L–движения в МП M_8, в котором алгебра векторов это алгебра октав. Однако ввиду ограниченного объёма статьи приведём конечную формулу L–движения в мультивекторном пространстве M_8 и укажем основные идеи, использованные при выводе этой формулы. Полный вывод формулы содержится в [6].

Пусть происходит переход из системы отсчёта O_p в систему отсчёта O_q. В системе отсчёта O_p рассматривается вектор $z_p \in M_8$ общего вида, такой что $z_p q_p - q_p z_p \neq 0$ (коммутатор векторов z_p и q_p не равен нулю), т.е. этот вектор не принадлежит целиком подпространству M_2^{pq}. Необходимо определить вид вектора z_q в системе отсчёта O_q по известным его параметрам из системы O_p.

Для получения общих формул L–движения вектор z_p можно разложить следующим образом

$$z_p = \mathrm{Re}(z_p) + Vr(z_p) = z_{p0} e_p + z_{p1} k_{pz} \quad (14).$$

Действительная часть вектора z_p равна

$$\mathrm{Re}(z_p) = \tfrac{1}{2}\left(z_p + \bar{z}_p\right) = z_{p0} e_p .$$

Мнимая часть вектора z_p равна

$$Vr(z_p) = \tfrac{1}{2}\left(z_p - \bar{z}_p\right) = \tfrac{1}{2} \| z_p - \bar{z}_p \| \frac{\left(z_p - \bar{z}_p\right)}{\| z_p - \bar{z}_p \|} = z_{p1} k_{pz} .$$

Где обозначено

$$z_{p1} = \tfrac{1}{2} \| z_p - \bar{z}_p \| \quad \text{и} \quad k_{pz} = \frac{z_p - \bar{z}_p}{\| z_p - \bar{z}_p \|} .$$

Вектор k_{pz} является мнимым, при этом $Nr(k_{pz})=1$, $Lr(k_{pz})=-1$.

Необходимые формулы L–движения в мультивекторном пространстве M_8 получаются, если разложить мнимую компоненту вектора $z_{p1} k_{pz}$ на две составляющие:

- на компоненту пропорциональную мнимой части вектора q_p, лежащую в подпространстве M_2^{pq};
- на компоненту EL–ортогональную к мнимой части вектора q_p, ортогональную подпространству M_2^{pq}.

Для разложения на составляющие используется процедура ортогонализации приведенная в [6]. После процедуры ортогонализации произвольный вектор $z_p \in M_8$ в системе отсчёта O_P можно записать в виде двух составляющих, а именно

$$z_p = \left(z_{p0} e_p + z_{p1} m i_{pq}\right) + z_{p1} \left\| \sqrt{1-m^2} \right\| n_{pz} \quad (15).$$

В формуле (15) введены обозначения:

- $m = \langle\langle k_{pz}, i_{pq} \rangle\rangle = \cos(k_{pz} \wedge i_{pq}) = \cos(\psi)$ –косинус угла между мнимыми единичными векторами k_{pz} и i_{pq};

- $$n_{pz}=\frac{k_{pz}-\langle\langle k_{pz},i_{pq}\rangle\rangle i_{pq}}{\left\|k_{pz}-\langle\langle k_{pz},i_{pq}\rangle\rangle i_{pq}\right\|}=\frac{k_{pz}-mi_{pq}}{\left\|\sqrt{1-m^2}\right\|}$$ – мнимый вектор с единичной евклидовой нормой и отрицательной единичной лоренцевой нормой, EL–ортогональный вектору i_{pq}.

В формуле (15) составляющая $z_{p0}e_p+z_{p1}mi_{pq}$ вектора z_p, записанная в скобках, принадлежит подпространству M_2^{pq} и преобразуется по формуле (11), приведенной ранее для подпространства M_2^{pq}. Составляющая $z_{p1}\left\|\sqrt{1-m^2}\right\|n_{pz}$, в направлении вектора n_{pz} EL–ортогональна подпространству M_2^{pq}, т.е. эта составляющая ортогональна любому вектору из подпространства M_2^{pq}, и в том числе к вектору $Vr(q_p)$. И как показано в [6] векторы, ортогональные к подпространству M_2^{pq}, не изменяют при L–движении таких параметров как ортогональность, а также величина евклидовой и лоренцевой нормы. В итоге для вектора общего вида z_q можно записать формулу преобразования, позволяющую определить его составляющие в системе отсчёта O_q по известным составляющим из системы отсчёта O_p

$$z_q=\frac{z_{p0}-\beta m z_{p1}}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}e_q-\frac{\beta z_{p0}-mz_{p1}}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}i_{qp}+z_{p1}\left\|\sqrt{1-m^2}\right\|n_{qz} \quad (16).$$

Область применения формулы (16) всё мультивекторное пространство M_8.

Вектор z_p можно записать, используя в качестве действительных параметров евклидову длину вектора z_p и параметр скорости этого вектора, а именно

$$z_p=\|z_p\|\left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}e_p+\frac{\alpha m}{\sqrt{1+\alpha^2}}i_{pq}+\frac{\alpha\left\|\sqrt{1-m^2}\right\|}{\sqrt{1+\alpha^2}}n_{pz}\right) \quad (17).$$

$$\alpha=\frac{\|z_p-\bar{z}_p\|}{z_p+\bar{z}_p}$$ параметр скорости вектора z_p.

При использовании параметра скорости вектора z_p, формула (16) перехода из системы отсчёта O_p в систему отсчёта O_q запишется в виде,

$$z_q=\frac{\|z_p\|}{\sqrt{1+\alpha^2}}\left(\frac{1-\beta m\alpha}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}e_q-\frac{\beta-m\alpha}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}i_{qp}+\alpha\left\|\sqrt{1-m^2}\right\|n_{qz}\right) \quad (18).$$

Приведенные формулы (16), (18) по структуре похожи на формулы преобразования Лоренца, полученные Герглотцем для четырёхмерного пространства Минковского. Однако формулы (16), (18) справедливы для МП M_8, в котором действует восьмимерная алгебра октав. Необходимо отметить следующий качественно новый результат:

В формулах (16), (18) векторы e_q , i_{qp} и n_{qz} порождают кватернионное подпространство M_4 алгебра векторов, в котором это алгебра кватернионов. Это подпространство M_4 имеет базис e_q, i_{qp}, n_{qz}, $i_{qp}\cdot n_{qz}$. Поэтому:

преобразование, с помощью формул L–движения, любого вектора из "восьмимерного" пространства M_8 происходит всегда в "четырёхмерном" подпространстве M_4, алгебра векторов в котором изоморфна алгебре кватернионов. Т.е. любое общее вращение пространства, осуществляемое L–движением, происходит всегда в "четырёхмерном" подпространстве.

Этот вывод в применении к физическому пространству означает, что наблюдатель может видеть всегда только трёхмерное пространство. При любом перемещении наблюдателя его трёхмерное подпространство изменяется и поворачивается в соответствии с формулами L–движения, но всегда это только трёхмерное подпространство. Дополнительные четыре пространственных измерения скрыты от наблюдателя т.к. ортогональны к его трёхмерному подпространству. Действительная составляющая (время) всегда ортогональна мнимым (пространственным) измерениям и поэтому также не наблюдаема визуально.

10. Ограничения, накладываемые L–движением на допустимые системы отсчёта и скорость.

Рассмотрим вид вектора q, задающего подпространство M_2^{pq}, в двух системах отсчёта O_p и O_q .

$$q_p = \| q_p \| \left(\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} e_p + \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} i_{pq} \right),$$

$$q_q = \pm \| q_p \| \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1+\beta^2}} e_q .$$

Относительное изменение евклидовой нормы вектора q при переходе из системы отсчета O_p в систему отсчёта O_q составит

$$\frac{Nr(q_q)}{Nr(q_p)} = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} \qquad (14).$$

В МП для векторов определена алгебра октав или, если это некоторое подпространство, то подалгебра алгебры октав. При этом алгебра МП такова, что

евклидова норма любого вектора всегда положительна или равна нулю. Поэтому из последней формулы следует ограничение $(1-\beta^2)/(1+\beta^2)\geq 0$ или $\beta^2\leq 1$. В этой связи, для вектора q_p задающего новую систему отсчёта, для параметра скорости β, всегда должно выполняться неравенство $||\beta||\leq 1$. Таким образом, для L–движения можно сформулировать ограничение на вектор, с которым можно связать систему отсчёта:

> **Преобразование мультивекторного пространства с помощью L–движения существует только для таких векторов, задающих систему отсчёта, у которых параметр скорости β отвечает неравенству $||\beta||\leq 1$.**

Систему отсчёта связанную с вектором, параметр скорости β которого отвечает неравенству $||\beta||\leq 1$, назовём ***допустимой системой отсчёта***:

Если некоторой движущейся точке, точечного пространства связанного с M_8, сопоставить вектор, совпадающий с направлением движения некоторой точки, то ограничение на параметр скорости этого вектора означает, что в пространстве, для которого определены L–движения

существует предельная скорость $||\beta||\leq 1$,

с которой могут распространяться возмущения.

Следствие.

Т.к. в L–движениях лоренцева норма сохраняется, то изотропный вектор, имеющий нулевую лоренцеву норму и параметр скорости $||\beta||=1$, в любой системе отсчёта остаётся изотропным. Если связать скорость света с движением по изотропному направлению, то скорость света окажется максимально возможной скоростью распространения возмущений и константой во всех допустимых системах отсчёта.

11. Локальность системы отсчёта при L–движении.

L–движение позволяет изменить систему отсчёта, при этом L–движение в МП сохраняет лоренцеву норму вектора. При переходе в другую систему отсчёта точка зрения наблюдателя изменяется. Поэтому изменяются векторы и структура наблюдаемого пространства. Укажем следующие изменения при L–движении [6]:

- Величина евклидовой нормы векторов при L–движениях не сохраняется;
- При переходе в другую систему отсчёта не сохраняется результат алгебраической операции произведения векторов;
- Пара векторов, сопряжённых в одной системе отсчёта, перестаёт быть сопряжённой в другой системе отсчёта;
- Пара векторов коммутирующих в одной системе отсчёта, перестаёт коммутировать в другой системе отсчёта;
- При переходе в другую систему отсчёта нарушается ассоциативность векторов.

Учитывая изменение структуры пространства при L–движении можно сделать заключение, что система отсчёта локальна. Т.е. данная структура пространства существует только в пределах данной системы отсчёта. В другой, неэквивалентной системе отсчёта структура пространства изменяется. Это согласуется с тем, что системы отсчёта образуют классы. Значение параметра скорости вектора определяет принадлежность системы отсчёта этого вектора к определённому классу.

Литература

1. А.Л. Вернер, Б.Е. Кантор, С.А. Франгулов "Геометрия". Т2, С.П "Специальная литература", 1997.
2. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. "Линейная алгебра и многомерная геометрия" М, Наука, ФМ, 1970.
3. Жевлаков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И. "Кольца близкие к ассоциативным". М, Наука ФМ, 1978.
4. Кантор И.Л. Солодовников А.С. "Гиперкомплексные числа" М, Наука ФМ, 1973.
5. Клейн Ф. "Элементарная математика с точки зрения высшей". Т1. Пер. с нем. изд. 1924г. Д.А. Крыжановского под ред. В.Г. Болтянского М, Наука ФМ, 1987.
6. Кубышкин Е.И. "Нелинейная алгебра пространства-времени" М.,УРСС, 2009.
7. Кубышкин Е.И. "Пространство-время и кватернионы" 2010г. http://www.chronos.msu.ru
8. Кубышкин Е.И. "Пространство-время и октавы" 2012г. http://www.chronos.msu.ru
9. Пенроуз Р. "Путь к реальности или законы, управляющие вселенной. Полный путеводитель" Пер. с англ. М.– Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика" 2007.
10. Пенроуз Р., Риндлер В. "Спиноры и пространство - время". Пер. с англ., М, Мир, 1987г.
11. Сазанов А.А. "Четырёхмерный мир Минковского". М, Наука ФМ, 1988.
12. Ханукаев Ю.И. "О кватернионах, конечные перемещения тела и точки". http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/033.pdf
13. Klein F. "Uber die geometrische Grundlagen der Lorentzgrupp", Mai 1910. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1910, pp 281–300.
14. L. Silberstein Quaternionic Form of Relativity *Phil Mag* S. 6 vol 23 No. 137 (May 1912) 790-809.