УДК 512+519.688

Точные представления групп автоморфизмами топологий

А. В. Коганов

Научно исследовательский институт системных исследований
Российской академии наук, Москва.

1. Введение

В этой работе обобщается известная теорема о том, что любая конечная группа является полной группой автоморфизмов некоторого конечного графа [1] – [6]. Будет доказано, что любая (в общем случае бесконечная) группа является полной группой автоморфизмов некоторой топологии. В использованной системе определений автоморфизмы и изоморфизмы топологии совпадают с ее гомеоморфизмами — топологическими отображениями (иногда гомеоморфизм рассматривают как более общее понятие).

Кроме того, будет рассмотрено специальное обобщение понятия топологии, полученное путем ослабления базовой аксиоматики (индукторные пространства). Класс индукторных пространств включает кроме обычных топологий еще конечные и бесконечные ориентированные графы, а также особые пространства, не попадающие ни в класс топологий, ни в класс графов. Использование этого понятия позволяет непосредственно обобщить указанную теорему об автоморфизмах графов на бесконечные группы и графы. Также удается описать стандартные действия некоторых геометрических групп симметриии как полные группы автоморфизмов индукторных пространств, построенных на соответствующих геометрических пространствах.

В частности, будет построено индукторное пространство на множестве точек конечномерного линейного пространства, группа симметрий которого совпадает с преобразованиями Лоренца при размерности выше двух. При этом на каждой гиперплоскоскости, секущей изотропные конусы, индуцируется топология, гомеоморфная евклидовой. Этот результат допускает чисто геометрическую формулировку. При размерности пространства выше двух полная группа автоморфизмов системы конусов, полученных параллельными сдвигами одного сферического конуса, совпадает со стандартным действием группы Лоренца на пространстве соответствующей размерности, расширенным произвольными сдвигами, равномерными растяжениями, а также поворотами и отражениями (евклидовыми изометриями) в гиперплоскости сферического сечения конусов. Доказательство основано на полученном ренее результате автора о том, что аффинная группа автоморфизмов такой системы конусов совпадает с указанным действием [8]. Будет доказано, что при размерности выше двух все автоморфизмы этой структуры аффинные.

[0]Поддержано РФФИ, проект 07-01-00101-а.

Представления в форме автоморфизмов индукторного пространства могут быть построены также для основных евклидовых изометрий: сдвигов, поворотов и поворотов с отражениями [11]. Эти результаты не включены в данную статью.

Автор выражает благодарность А. И. Штерну, А. Ю. Лемину, С. Ю. Владимирову, М. И. Граеву, А. П. Левичу, Ю. Б. Котову, В. В. Смолянинову, А. П. Черняеву, А. И. Лобанову за интерес к данной работе, содействие и полезные замечания.

2. Индукторные пространства

Для решения задачи представления групп автоморфизмами топологий или графов удобно ввести объект, который обобщает эти понятия и определяет на абстрактном множестве точек структуру, автоморфизмы которой образуют представление заданной группы. С этой целью определим класс индукторных пространств.

Определение 2.1. Отношением индукции I на множестве T назовем произвольно заданное множество пар вида $[t, V]_I$, где $t \in T,\ V \subset T$.

Элементы отношения индукции $[t, V]_I$ назовем *индукторной парой*, точку t — *центром индукции* или *центром* пары, множество V — *индуктором* пары или точки t.

Определение 2.2. *Индукторным пространством* назавем множество T с отношением индукции I, которое удовлетворяет следующим аксиомам.

AI1. Аксиома принадлежности. Если $[t, V]_I \in I$ то $t \in V$.

AI2. Аксиома транзитивности. Если $[t, V]_I \in I,\ [x, W]_I \in I,\ x \in V$, то $[t, V \cup W]_I \in I$.

В работах [7] [8] [9] индукторное пространство вводилось с расширенным набором аксиом. Но дальнейшие исследования показали, что это излишне сужает класс пространств и создает технические трудности при доказательстве теорем. Однако, доказанные ниже теоремы верны и в той аксиоматике. Соответствующие доказательства представлены в [9].

С точки зрения топологии индуктор естественно интерпретировать как окрестность центра индукции данной И-пары. Соответственно, можно говорить о сходимости последовательностей и о предельных точках подмножеств на T, если задано отношение индукции. Аксиома транзитивности в этой интерпретации является ослабленной аксиомой произвольного объединения открытых множеств.

С точки зрения теории графов индуктор можно интерпретировать, как подмножество вершин, из которых есть пути по стрелкам графа в центр индукции. Соответственно, аксиома транзитивности интерпретируется как возможность наращивать соответствующие пути по графу.

Иногда будут использоваться сокращенные термины: И-отношение, И-пара, И-пространство. На индукторном пространстве отношение индукции будем называть *индукцией*, множество T — *носителем индукции*, а его элементы — *точками пространства*.

Этот термин возник при использовании И-пространств как носителей распределенных процессов в математических моделях, где индукторы точки играют роль областей влияния на эту точку [8] [9]. Для целей данной статьи такая интерпретация не существенна.

В общем случае индукторные пространства не являются ни графами ни топологиями. Соответствующие примеры имеются в [8] [9]. Однако, и топологии и графы могут рассматриваться как частные случаи И-пространств.

3. Связь индукторных пространств с графами и топологиями

Строгие определения вложениий классов топологий и графов в класс индукторных пространтсв и соответствующие расширения топологических определений даются в [8] [9] и будут повторены ниже с указанием возможных модификаций.

Топология τ, определенная как набор открытых подмножеств на множестве точек T, может быть рассмотрена как индукторное пространство, состоящее из всех возможных И-пар вида $[x, V]_\tau$ где $V \in \tau$, $x \in V$. Тогда каждой топологической окрестности произвольной точки соответствует И-пара с центром индукции в данной точке. Каждому открытому множеству сопоставлено множество И-пар, соответствующих разным центрам.

При этом следует учитывать, что при построении топологии из базового набора окрестностей точек используется более широкий класс порождающих операций (произвольные объединения и конечные пересечения) чем в индукторном пространстве (только транзитивные объединения). Поэтому базовый набор И-пар для порождения топологии в форме индукторного пространства соответствует в общем случае расширенному набору базовых окрестностей.

Важное отличие общей конструкции индукции от топологии состоит в том, что точка может принадлежать индуктору, который не является ее собственной окрестностью, в том смысле, что нет И-пары, где данная точка является центром индукции этого индуктора. Но при переходе от топологии к индукции указанным способом такая ситуация не возникает.

Ориентированный граф, с множеством вершин T, определенный как заданное подмножество $S \subset T \times T$ упорядоченных пар вершин (стрелок) (x, y) =(исходная вершина, входная вершина), может быть описан как индукторное пространство на множестве вершин как точек, где базовые И-пары имеют вид $[x, V]_S$, x – вершина, V – множество вершин, из которых есть стрелки, входящие в x: $V = \{y | (y, x) \in S\}$. Остальные элементы индукции определяются из базовых по аксиоме транзитивности.

Определение 3.1. Указанные выше соответствия топологий и графов индукциям будем называть *каноническими*.

Следствие 3.1. Для графа вершина y входит в некоторый индуктор вершины x, если и только если есть путь по стрелкам от y к x.

Следствие 3.2. И для топологий и для графов в канонических переходах к индукции пересечение любых двух индукторов одной точки дает индуктор той же точки. Верно и более общее свойство: если некоторый индуктор точки x принадлежит индуктору V некоторой точки y, то любой индуктор x пересекает V по индуктору x.

Возможны другие варианты соответствий. Общим для них является возможность по отношению индукции однозначно восстановить топологию или граф, и обратно.

В работах [7] [8] [9] предлагался вариант перехода от топологии к И-пространству путем использования в качестве индукторов замыканий открытых множеств. Это делалось для удобства описания моделей распределенных процессов. В этом варианте предельные точки для множеств и последовательностей надо определять, исходя из внутренностей индукторов в качестве окрестностей точек. В данной работе этот вариант не будет рассматриваться.

Определение 3.2. *Альтернативным переходом* от графа к индукции назовем базовые И-пары $[x, \{x; y\}]_{Sa},\ \ (x, y) \in S$. Их также надо дополнить И-парами, полученными замыканием по аксиоме транзитивности.

Этот вариант дает в общем случае больше индукторов точки, чем канонический. Следствие 3.2 для альтернативного перехода не всегда верно. Но следствие 3.1 сохраняется.

Некоторые топологические понятия можно перенести на общие индукторные пространства.

Определение 3.3. Точка называется *внутренней* для некоторого подмножества носителя индукции, если в этом подмножестве содержится некоторый индуктор этой точки. Остальные точки этого подмножества — *граничные*. Точка является *предельной для подмножества* носителя, если в любом ее индукторе содержится элемент этого подмножества. Точка является *предельной для последовательности* точек из носителя индукции, если в любом ее индукторе содержится бесконечно много членов последовательности. Точка является *пределом последовательности*, если в любом ее индукторе лежат все члены последовательности, начиная с некоторого.

4. Автоморфизмы индукторных пространств

На классе индукторных пространств определено понятие изоморфизма.

Определение 4.1. Два И-пространства $[T, I]$, $[T', I']$ называются *изоморфными*, если существует биекция носителей (*изоморфизм*) $h : T \leftrightarrow T'$, которая порождает биекцию индукций $H : I \leftrightarrow I'$, где $H \circ [t, V]_I \stackrel{def}{=} [h(t), h \circ V]_{I'}$.

Изоморфизм И-пространства на себя ($T = T'$, $I = I'$) называется *автоморфизмом*.

Определение 4.2. Автоморфизмы любого И-пространства $[T, I]$ образуют группу по операции суперпозиции. Обозначим ее $aut[T, I]$ (*группа* *автоморфизмов*). Единицей является тождественный автоморфизм $E(x) = x, \ x \in T$. Обратный к произвольному автоморфизму h элемент — это биекция h^{-1}.

Лемма 4.1. *Гомеоморфизм топологий и изоморфизм графов эквивалентны изоморфизмам индукторных пространств при каноническом отображении.*

Доказательство. Если имеется гомеоморфизм двух топологий, то образ или прообраз каждого открытого множества одной из топологий является открытым множеством в другой топологии. При каноническом отображении в индукторные пространства индукторы являются биективными образами открытых множеств, а соответствующие им центры индукции — биективными образами точек этих множеств. Значит каждый гомеоморфизм двух топологий является изиморфизмом их канонических образов. Обратно, изоморфизм двух канонических образов топологий является биекцией множеств точек их носителей, при которой каждый индуктор одной индукции есть образ или прообраз индуктора другой индукции. Следовательно, каждое открытое множество одной топологии есть образ или прообраз открытого множества другой, а это суть определяющее свойство гомеоморфизма. Для топологий доказательство завершено. Изоморфизм двух гафов является биекцией множеств их вершин, при которой стрелы одного графа являются однозначными образами или прообразами стрел другого графа. Это означает, что минимальная окрестность любой вершины по входящим стрелам одного графа соответствует минимальной окрестности образа этой вершины по входящим стрелам другого графа. Поскольку эти окрестности являются порождающей системмой И-пар каждой индукции, то изоморфизм графов является изоморфизмом их канонических образов. Обратно, если имеется изоморфизм канонических индукторных образов двух графов, то он определяет биекцию носителей этих И-пространств, совпадающих с множеством вершин. Любой изоморфизм индукторных пространств сохраняет вложенность индукторов каждой точки, поскольку он является биекцией. Следовательно, если у точки имеется минимальный по вложению индуктор, то он отображается в минимальный индуктор образа этой точки как при прямом, так и при обратном отображении. Следовательно, изоморфизм канонических образов двух графов ставит в соответствие входящим стрелам в любую вершину одного графа входящие стрелы в образ этой вершины на другом графе. Это означает, что образом или прообразом любой стрелы является стрела соответсвенной ориентации, что при биективности отображения определяет изоморфизм графов. □

Замечание 4.1. Для альтернативного перехода от графа к И-пространству лемма 4.1 также верна, поскольку образы стрел в нем являются минимальными индукторами своих входных вершин. В этом случае у точки может быть любое число минимальных индукторов. В каноническом отображении графа или топологии возможно не более одного минимального индуктора.

5. Жесткие И-пространства, топологии и графы

Определение 5.1. Индукторное пространство называется *жестким*, если его группа автоморфизмов состоит только из тождественного автоморфизма: $aut[T, I] = \{E\}$.

Жесткие пространства образуют бесконечный класс. Это позволяет расширять индукторные пространства, не меняя или строго сужая их группу автоморфизмов. Ниже будет предложена стандартная конструкция бесконечного множества попарно неизоморфных жестких пространств, которая будет использована при доказательстве основных теорем.

Рассмотрим произвольный трансфинитный порядковый тип p. Ему соответствует вполне упорядоченное множество соответствующей мощности $\#p$ — трансфинитная последовательность порядкового типа p попарно различимых элементов:

$$S(p) = (a_1,\, a_2, \dots a_p)\ . \tag{5.1}$$

Если p предельный ординал, то последний член в (5.1) надо понимать условно, как ограничение последовательности. Сопоставим последовательности (5.1) индукторное пространство $SH_p = [S(p), H(p)]$ с носителем $S(p)$ и индукцией $H(p)$

$$H(p) = \{[a_i, \{a_1;\, a_2; \dots;\, a_i\}]_H \,|\, i \leqslant p\}\ . \tag{5.2}$$

В индукции (5.2) единственным индуктором каждой точки является множество $S(i) \subset S(p)$ элементов из (5.1), которые не превосходят его в этой упорядоченности.

При разных ординалах p пространства $SH(p)$ не изоморфны, поскольку не существует биекции, сохраняющей порядок, для трансфинитных последовательностей разных порядковых типов. По той же причине группа автоморфизмов $SH(p)$ тривиальна. Каждый начальный отрезок $S(i)$ из $S(p)$ (индуктор) можно строго монотонно отобразить только на себя.

$$aut(SH(p)) = aut[S(p), H(p)] = \{E\}$$

Лемма 5.1. *Для любой мощности m существует жесткое индукторное пространство с носителем этой мощности. Каждому ординалу p мощности m соответсвует жесткое И-пространство, неизоморфное таким пространствам для других ординалов.* (Доказательство приведено выше.)

Замечание 5.1. В дальнейшем потребуется иметь множество G экземпляров одного жесткого пространства, которые изоморфны, но различимы. Для этого введем параметр $g \in G$. Экземпляры пространства будем обозначать $SH_{p,g} = [S(p, g), H(p, g)]$, а их точки — $a(g)_i$ в соответствие с (5.1).

От жестких И-пространств можно перейти к жестким топологиям и графам.

Определение 5.2. Граф называется *жестким*, если его группа автоморфизмов состоит только из тождественного автоморфизма.

Лемма 5.2. *Для любой мощности m существует жесткй граф с носителем этой мощности. Каждому ординалу p мощности m соответсвует жесткй граф, неизоморфный таким графам для других ординалов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. И-пространство SH_p является каноническим образом графа SHG_p с множеством вершин $S(p)$ и всеми стрелами вида (a_i, a_j) где $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant p$. Утверждение леммы следует из леммы 4.1 и леммы 5.1. $\square$

Определение 5.3. Топология называется *жесткой*, если её группа автоморфизмов (гомеоморфизмов на себя) состоит только из тождественного автоморфизма.

Лемма 5.3. *Для любой мощности m существует жесткая топология с носителем этой мощности. Каждому ординалу p мощности m соответсвует жесткая топология, негомеоморфная таким топологиям для других ординалов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Индукторы И-пространства SH_p дают базовую систему окрестностей для канонического образа топологии SHT_p, на множестве точек $S(p)$ и открытыми множествами вида $S(j)$ где $1 \leqslant j \leqslant p$. Множество $S(i)$ является минимальной окрестностью точки a_i и минимальным индкутором ее канонического образа. При автоморфизме индкуций минимальный индуктор точки переходит в минимальный индуктор её образа. Поэтому любой автоморфизм SHT_p вляется автоморфизмом SH_p. Утверждение леммы следует из леммы 4.1 и леммы 5.1. $\square$

6. Представление групп автоморфизмами И-пространств, топологий и графов

В [8] [9] показано, что любая группа определяет бесконечный класс индукторных пространств, у которых группы автоморфизмов алгебраически изоморфны данной. Такие пространства будем называть изображением этой группы (класс изображений), а их автоморфизмы можно рассматривать как представления этой группы. Порожденное действие автоморфизмов на линейном пространстве функций, определенных на носителе И-пространства, дает мультиплекативное представление в алгебре линейных операторов. Для получения аналогичного результата для групп автоморфизмов топологий и графов будет использована приведенная ниже конструкция индукторных изображений групп.

Определение 6.1. Индукторное пространство является *индукторным изображением* (И-изображением, изображением) некоторой группы, если группа всех автоморфизмов этого пространства изоморфна данной группе.

Теорема 6.1. *Любая группа G имеет индукторное изображение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будут исползованы обозначения S_p, H_p, SH_p из доказательства леммы 5.3. Обозначим m мощность множества элементов группы G. Пусть

$$Q = \{Y_g | g \in G \cup \{0\}\}$$

набор непересекающихся множеств (слоев), и мощность каждого слоя Y_g равна m. Выберем ординал p мощности m. Зададим биекцию $r : G \leftrightarrow S_p$.

На каждом множестве $Y_g \in Q$ определим биекцию $h_g : Y_g \leftrightarrow G$.

Тогда определена биекция $r \circ h_g = r_g : Y_g \leftrightarrow S_p$.

Зададим на каждом $Y_g, g \in G$, индукцию $I_g = H_p$ относительно упорядоченности r_g. На множестве Y_0 зададим индукцию

$$I_0 = \{[x, \{x\}]_I | x \in Y_0\} ,$$

которую далее будем называть *петлевой*, поскольку она канонически соответствует графу, где каждая вершина дает стрелу на себя, и других стрел нет. Обозначим

$$T = \cup Q .$$

Индукция I на T кроме указанных индукторов из $\cup I_g | g \in G \cup \{0\}$ содержит все индукторы вида

$$[x, \{x; z\}]_I,\ x \in Y_0,\ z = h_g^{-1}(h_0(x)g^{-1}),\ g \in G .$$

Это соответствует стрелам графа J, который связывает точку x слоя Y_0 (как входную) с точкой z слоя Y_g (как с исходной), причем z соответствует на слое Y_g умножению справа на $g^{-1} \in G$ образа точки x в системе отображений h этих слоев на группу G.

Покажем что $aut[T, I] \simeq G$. Индукция на каждом слое $Y_g, g \in G$, жесткая. Следовательно, при любом автоморфизме такой слой можно отобразить только на слой того же вида с сохранением упорядоченности r. Слой Y_0 может быть отображен только на себя, причем допускает произвольные автобиекции относительно индукции I_0. Но их ограничивает граф J. Допустимы только такие автобиекции, при которых возможно отобразить слои $Y_g, g \in G$, биективно друг на друга, с сохранением стрел из J. Покажем, что любая такая биекция соответствует правому умножению индексов этих слоев на некоторый элемент группы. Пусть $v \in aut[T, I],\ x \in Y_0$. Для каждого x существует некоторый $f \in G,\ f = (h_0(x))^{-1} h_0(v(x))$, для которого

$$v(x) = h_0^{-1}(h_0(x)f)$$

Рассмотрим произвольный слой $Y_g, g \in G$. Допустим $v \circ Y_g = Y_q$. Имеется единственная стрела $(x, z_g),\ z_g \in Y_g$ из графа J.

$$z_g = h_g^{-1}(h_0(x)g^{-1})$$

Поскольку v – автоморфизм, то в J имеется стрела $(v(x), v(z_g))$.

$$v(z_g) = h_q^{-1}(h_0(v(x))q^{-1}) = h_q^{-1}(h_0(x)fq^{-1})$$

Поскольку $v : Y_g \leftrightarrow Y_q$ – изоморфизм, то

$$r(h_g(z_g)) = r(h_0(x)g^{-1}) = r(h_q(v(z_g))) = r(h_0(x)fq^{-1}) .$$

В силу биективности r

$$h_0(x)g^{-1} = h_0(x)fq^{-1}$$

$$q = gf$$

Поскольку весь слой Y_g отображается на слой Y_q, то элемент группы f один для всех $x \in Y_0$, $f = g^{-1}q$. Автоморфизм v на слое Y_0 имеет вид

$$v \circ Y_0 = h_0^{-1} \circ ((h_0 \circ Y_0)f)$$

Если $v_1, v_2 \in aut[T, I]$, и им соответствуют $f_1, f_2 \in G$ по указанной формуле, то

$$v_2 \circ v_1 \circ Y_0 = h_0^{-1} \circ ((h_0 \circ Y_0)f_1 f_2)$$

Эта формула устанавливает изоморфизм $aut[T, I] \simeq G$. Таким образам, автоморфизмы задают представление группы. $\square$

Замечание 6.1. Если отождествить элементы слоев Y_g с элементами группы G по биекциям h_g, и e – единица группы G, то на слоях с индексами $g \in G$ граф J записывает перестановку элементов слоя Y_e, которая возникает при правом действии на группе элемента g^{-1}. Поэтому возможны только такие автоморфизмы, которым соответствует действие группы на себе. Это исключает внешние автоморфизмы группы из $aut[T, I]$. Фактически, предложенное выше изображение группы в конечном случае соответствует записи в форме графа всех перестановок элементов группы, которые возникают при умножении на элемент группы.

Утверждение 6.1. *Неизоморфные изображения данной группы образуют бесконечный класс.*

Доказательство. Утверждение следует из леммы 5.1. Рассмотрим объединение И-пространства T с жестким пространством X, которое не пересекает T и не имеет изоморфных вложений в него. Если нет добавления новых индукторов, то $aut(T) \simeq aut(T \cup X)$. В то же время неизоморфные добавленные пространства X дают неизоморфные объединения. $\square$

Теорема 6.2. *Любая группа G имеет изображение на классе графов (в общем случае бесконечных).*

Доказательство. Рассмотрим конструкцию доказательства теоремы 6.1. По лемме 5.2 жесткие слои Y_g могут быть построены в форме графов. Соединение их с графом Y_0 с помощью графа J дает искомый граф с группой автоморфизмов $aut[T, I] \simeq G$. $\square$

Замечание 6.2. *Если группа конечная, то построенное ее изображение является конечным графом.*

Таким образом предложенная конструкция дает еще одно доказательство теоремы о представлении конечных групп [2].

Теорема 6.3. *Любая группа G имеет изображение на классе топологий.*

Доказательство. Рассмотрим конструкцию доказательства теоремы 6.1. По лемме 5.3 жесткие слои Y_g могут быть построены в форме топологий. Слой Y_0 может быть модифицирован в дискретную топологию. Стрелы графа J преобразуются в открытое множество не канонически. Это нужно для того, чтобы не возникло новых окрестностей на слоях Y_g. Обозначим

$W_g(x)$ множество элементов на Y_g, которые не превосходят x в упорядочении S_p. Стрела (x, y), $x \in Y_g$, $y \in Y_0$, преобразуется в открытое множество

$$V_{x,y} = \{y\} \cup W_g(x)$$

. Тогда слои остаются жесткими, так как на них сохраняется внутренняя топология леммы 5.3. На слое Y_0 возникают новые окрестности точек, за счет объединения открытых множеств $V_{x,y}$). Но соответствие точек слоев сохраняется как в графе J, поскольку $V_{x,y}$) минимальная окрестность точки y, имеющая пересечение со слоем, где лежит x. Поэтому при любом автоморфизме она переходит в окрестность такого же вида. Эти окрестности точки $y \in Y_0$ на каждом слое однозначно определяют стрелу (x, y). Получаем топологию с группой автоморфизмов $aut[T, I] \simeq G$. $\square$

Замечание 6.3. *Если группа конечная, то построенное ее изображение является конечным топологическим пространством.*

7. Представление действия группы автоморфизмами И-пространств, топологий и графов

Определение 7.1. Действием $W : G$ некоторой группы G на заданное множество W называется набор Q автобиекций этого множества

$$q \in Q \Rightarrow q : W \leftrightarrow W\ ,$$

замкнутый относительно суперпозиции, изоморфный по суперпозиции умножению в группе: существует биекция $P : Q \leftrightarrow G$

$$q, q' \in Q, \Rightarrow P(q(q')) = P(q')P(q).$$

Определение 7.2. Индукторное пространство $[T, I]$ является *индукторным изображением* (И-изображением, изображением) действия группы G на множество W, если возможны инъекция

$$H : W \rightarrow\rightarrow T\ ,$$

в которой HW инвариантное множество всех автоморфизмов пространства, и биекция

$$P : (aut[T, I]/_{HW}) \leftrightarrow G\ ,$$

для которых

$$(H^{-1} \times P) \circ (HW \times aut[T, I]/_{HW}) = (W : G)\ .$$

Обозначение:

$$aut[T, I]/_{HW} \simeq (W : G)$$

Индекс-множество под косой чертой обозначает ограничение действия автоморфизмов на это множество.

Теорема 7.1. *Любое действие группы G на множество W имеет индукторное изображение.*

Доказательство. Конструкция изображения аналогична конструкции в теореме 6.1. Слои Y_g соответствуют элементам группы $g \in G$. Мощность ординала p и каждого слоя Y_g, $g \in G \cup \{0\}$, равна $m = \#W$. Задаем биекции:

$$r : W \leftrightarrow S_p;\ h_g : Y_g \leftrightarrow W.$$

Слои $Y_g, g \in G$, имеют жесткую индукцию H_p в упорядоченности h_g. Слой Y_0 имеет петлевую индукцию.

Обозначим действие элемента группы на элемент множества

$$x : g = y,\ x, y \in W,\ g \in G$$

Граф J строится на $T = \cup Y_g | g \in G$ стрелами

$$(z, x),\ x \in Y_0,\ z = z(g, x) = h_g^{-1}(h_0 x : g^{-1}) \in Y_g$$

Им соответствует индукторная пара $[x, \{x; z\}]_I$. Это завершает построение индукции I. Если $v \in aut[T, I]$, $x \in Y_0$, то возможны только такие $v(x)$, для которых на некоторых слоях Y_g, Y_q выполнено

$$h_g(z(g, x)) = h_q(z(q, v(x)))$$

Тогда имеется $f = g^{-1}q$, для которого $v(x) = x : f$. При этом весь слой Y_g отобразится биективно на слой Y_q в силу жесткости индукции H_p. Поэтому для всех $x \in Y_0$ действие $v \in aut[T, I]$ определено формулой $v(x) = x : f$. Если $v_1, v_2 \in aut[T, I]$, и им соответствуют $f_1, f_2 \in G$ по указанной формуле, то

$$v_2 \circ v_1 \circ Y_0 = h_0^{-1} \circ (((h_0 \circ Y_0) : f_1) : f_2) = h_0^{-1} \circ ((h_0 \circ Y_0) : (f_1 f_2))$$

Эта формула устанавливает изоморфизм $aut[T, I] \simeq (W : G)$. Образом множества W является Y_0 с инъекцией h_0^{-1} и биекцией группы $v \mapsto f$. $\square$

Теорема 7.2. *Любое действие группы G на множестве имеет изображение на классе топологий и на классе графов.*

Доказательство аналогично доказательствам теорем 6.3 и 6.2 с опорой на конструкцию доказательства теоремы 7.1.

Определение 7.3. Действием $W : G(inv = U)$ некоторой группы G на заданное множество W с инвариантной системой подмножеств $U, V \in U \Rightarrow V \subset W$, называется набор Q автобиекций этого множества

$$q \in Q \,\&\, V \in U \Rightarrow q : W \leftrightarrow W \,\&\, q \circ V \in U\,,$$

замкнутый относительно суперпозиции, изоморфный по суперпозиции умножению в группе: существует биекция $P : Q \leftrightarrow G$, для которой

$$q, q' \in Q, \Rightarrow P(q(q')) = P(q')P(q)\ .$$

Другими словами, действие группы на множество с сохранением системы подмножеств — это действие группы на множество, при котором каждая автобиекция переводит подмножество из системы в подмножество из той же системы.

Определение 7.4. Наведенной индукцией I/A на подмножестве A индукторного пространства $[T,I]$ называется множество индукторных пар

$$\{[x,B]_{I/A}\,|\,x\in A,\;B=C\cap A,\;[x,C]_I\in I\}\;.$$

Определение 7.5. Индукторное пространство $[T,I]$ является *индукторным изображением* (И-изображением, изображением) действия группы G на множество W с инвариантной системой подмножеств U, если оно является изображением этого действия с инъекцией H, и образы подмножеств из U являются порождающей системой индукторов в наведенной индукции на HW. Обозначение:

$$aut[T,I]/_{HW}\simeq W:G(inv=U)\;.$$

Лемма 7.1. *Действие группы на множество с сохранением системы подмножеств* $W:G(inv=U)$ *является действием* $W:G(inv=tr(U))$*, где*

$$tr(U)=\{A\cup B\mid A,B\in U,\;A\cap B\neq\emptyset\}\;.$$

Доказательство. Любая биекция переводит объединение множеств в объединение их образов, а пересечение множеств — в пересечение образов. Поэтому $tr(U)$ инвариантна вместе с U относительно любой системы биекций. □

Лемма 7.2. *Любое действие группы* G *на множество* W *с сохранением системы подмножеств* U *имеет индукторное изображение.*

Доказательство. Используем конструкцию из доказательства теоремы 7.1. Образ HW в этом И-изображении совпадает со слоем Y_0. На этом слое задана петлевая индукция. Поэтому в общем случае это не будет искомым изображением. Добавим еще один слой с негруповым индексом Y_W с соответствующей биекцией

$$h_W:Y_W\leftrightarrow W\;.$$

$$T=\cup Y_c\,|c\in G\cup\{0;W\}\;;\;T'=\cup Y_c\,|c\in G\cup\{0\}\;.$$

Дополним граф J стрелами

$$(w,x),\;w\in Y_W,\;x\in Y_0,\;h_W(w)=h_0(x)\;;$$

$$w=w(x)=h_W^{-1}(h_0(x)); \tag{7.1}$$

При этом на слое Y_0 сохраняется петлевая наведенная индукция. Обозначим $H=h_W^{-1}$. На слое Y_W зададим И-пары вида

$$[w,V]_I,\;V\in H\circ U,\;w\in V\;.$$

Дополним их индукторами замыкания по аксиоме транзитивного объединения. По построению совокупность индукторов этой индукции совпадает с $tr(U)$. По лемме 7.1 эта система индукторов также инвариантна относительно действия группы. Тогда автобиекции слоя Y_W при автоморфизмах $[T,I]$ соответствуют по отображению (7.1) биекциям слоя Y_0 в автоморфизмах $[T',I]$ из теоремы 7.1. При автоморфизмах невозможно отображение точек слоя Y_0 в точки слоя Y_W и обратно, поскольку индукторы слоя Y_W не пересекаются со слоями

$Y_g,\ g \in G$. Если группа G не тривиальная, то слой Y_W не изоморфен слоям $Y_g,\ g \in G$, и при автоморфизмах их отображение друг в друга невозможно. Поэтому группа автоморфизмов построенного пространства изоморфна группе автоморфизмов пространства из теоремы 7.1, и, следовательно, изоморфна G. Использовав отображение H в качестве инъекции $H : W \to\to T$, получим искомое изображение.

Однако, возможен гомеоморфизм Y_W и одного из $Y_g,\ g \in G$. В этом случае группа G единичная, $g = e$, поскольку эти слои — жесткие. Тогда надо устранить из конструкции слой Y_W и положить $H = h_e^{-1}$. Это тривиально решает задачу изображения тождественного действия. $\square$

Теорема 7.3. *Любая подгруппа G группы гомеоморфизмов топологического пространства $(X|\tau)$ имеет индукторное изображение с сохранением системы открытых множеств.*

Такие изображения можно строить в классах топологий.

Доказательство. Существование изображения следует из леммы 7.2:

$$W = X;\ U = \tau;\ H = h_W^{-1};\ H' = h_0^{-1}\ .$$

Переход к изображению на классе графов нельзя в общем случае получить аналогично теореме 6.2, поскольку индукция на слое Y_W в этой конструкции является топологией, и сведение ее к графу в общем случае невозможно.

Переход в класс топологий возможен аналогично теореме 6.3. Для этого надо добавить к полученным там открытым множествам совокупность множеств

$$U_H = \{u_V = H \circ V \cup H' \circ V \mid V \in \tau\},$$

где $H \circ V \subset Y_W,\ \ H' \circ V \subset Y_0$, а также порожденные из них множества по аксиомам произвольного объединения и конечного пересечения. Поскольку топология замкнута относительно этих операций, на слое Y_W не возникает новых индукторов в каноническом отображении топологии. На слое Y_0 при переходе от петлевой индукции к дискретной топологии по теореме 6.3 возникают все индукторы вида

$$[x, v]_I,\ v \subset Y_0,\ x \in v\,,$$

которые не влияют на группу автоморфизмов, поскольку инвариантны относительно лубой биекции. Новые наведенные индукторы вида $H' \circ V$ попадают в этот класс подмножеств и не меняют наведенной индукции $[T, I]/_{Y_0}$. Поэтому полученное множество индукторов $[T, I]/_{Y_0 \cup Y_W}$ инвариантно относительно действия автоморфизмов, представляющих группу G. На других слоях наведенная индукция не меняется. Поэтому, если слой Y_W не гомеоморфен ни одному из слоев $Y_g,\ \ g \in G$, то сохраняется свойство индукторного изображения действия $X : G(inv\,\tau)$. Случай гомеоморфизма Y_W и одного из $Y_g,\ g \in G$, решается как в доказательстве леммы 7.2. $\square$

8. Пространства с конической индукцией

Определение 8.1. *Коническим пространством* $Rc[n]$ называется пространство $\mathbb{R}^n$ с индукцией, где порождающей системой индукторов точки y являются конусы, записываемые в некоторой системе координат $x_1, \ldots, x_n$ в виде

$$0 \leqslant (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 - \ldots - (x_n - y_n)^2 \ , 0 \leqslant y_1 - x_1 \leqslant H, \ H > 0 \ .$$

Если требовать $|y_1 - x_1| \leqslant H$, то пространство называется *биконическим* $Rb[n]$. Если требовать $0 \leqslant y_1 - x_1$, то пространство называется *полным коническим* $Rfc[n]$. Если не накладывать ограничений на $y_1 - x_1$, то пространство называется *полным биконическим* $Rfb[n]$.

Автоморфизмы по структуре индукторов обозначим $aut\ Rc[n]$ и т. п.

Коническое пространство можно рассматривать как векторное пространство с заданной на нём системой сферических конусов, полученных как все возможные параллельные сдвиги одного конуса. В биконических пространствах конусы двусторонние по отношению к вершине. В неполных пространствах кроме полных конусов рассматриваются конусы, ограниченные по высоте. Параметр H задает это ограничение для конкретного конуса из порождающего множества. Транзитивным объединением можно получить разнообразные границы неполных конусов. Конические индукторные пространства не попадают в классы графов или топологий.

Замечание 8.1. *Используя аксиому транзитивного объединения легко показать, что*

$$aut\ Rc[n] = aut\ Rfc[n]; \ \ aut\ Rb[n] = aut\ Rfb[n] \ .$$

Поэтому, исследование групп автоморфизмов достаточно проводить только для классов полных пространств. Выделение четырех классов пространств конического типа связано с потребностями математического моделирования в различных приложениях. Использование ограниченных конусов (параметр H) задает топологию на оси времени в моделях математической физики [8][12]. Но для целей данной статьи это не существенно. Далее будем рассматривать только полные конические и биконические пространства. Предметом исследования будет группа автоморфизмов.

В [8] показано, что аффинная группа автоморфизмов конического пространства совпадает с каноническим действием группы Лоренца на пространстве Минковского соответствующей размерности, расширенной всеми параллельными сдвигами, поворотами и отражениями в гиперплоскости сферического сечения конуса, а также равномерными растяжениями (умножение векторов на положительное число). Далее, это действие назовем афинным расширением (действия) группы Лоренца и обозначим $ALor[n]$, а саму эту абстрактную группу $GAL[n]$.

Ниже будет показано, что для размерностей 1 и 2 полная группа автоморфизмов значительно шире своей аффинной подгруппы, а, начиная с размерности 3, полная группа автоморфизмов совпадает с аффинной подгруппой.

Обозначим $\circ$ — суперпозицию двух действий на множестве, $\times$ — прямое произведение групп, $\otimes$ — прямое произведение действий на прямом произведении соответствующих множеств (в линейном пространстве — на прямой сумме

$\oplus$ подпространств), $Gaut[T,I]$ — абстрактную группу, изоморфную группе автоморфизмов пространства.

Теорема 8.1. $autRc[1]$ *— это все положительно монотонные биекции* $\mathbb{R}^1$;

$$autRc[2] = ((autRc[1] : Z_1) \otimes (autRc[1] : Z_2)) \circ h_2(2) ,$$

где Z_1, Z_2 *— две образующие двухмерного конуса, действие* $h_n(i)$, $i \leqslant n$, *на* $\mathbb{R}^n$ *— инверсия (умножение на -1) оси* x_i, *в частности,* $h_2(2)$ *производит перестановку образующих конуса на* $\mathbb{R}^2$*;*

$$GautRc[2] = GautRc[1] \times GautRc[1] \times S_2;$$

где $S_2 = Gh_n(i)$ *— группа второго порядка;*

$$autRc[n] = ALor[n], \ \ n \geqslant 3 ,$$

$$GautRc[n] = GAL[n], \ \ n \geqslant 3 .$$

Теорема 8.2. $autRb[1]$ *— это все монотонные биекции* $\mathbb{R}^1$,

$$autRb[1] = autRc[1] \circ R_h(1) ,$$

$$GRb[1] = GRc[1] \times S_2 ,$$

где действие $R_h(n)$ *— отражение* $\mathbb{R}^n$ *относительно нулевой точки (умножение векторов на -1);*

$$autRb[2] = autRc[2] \circ h_2(1) \circ h_2(2) ,$$

$$GautRb[2] = GautRc[1] \times GautRc[1] \times S_2 \times S_2 ;$$

$$autRb[n] = ALor[n] \circ R_h(n), \ \ n \geqslant 3 ,$$

$$GautRb[n] = GAL[n] \times S_2, \ \ n \geqslant 3 .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действия групп $autRb[n]$ и $autRc[n]$ отличаются только прямым домножением на инверсию оси конуса, которая соответствует координате x_1, что обуславливается соответствующей симметрией порождающей системы биконической индукции. Поэтому теорема 8.2 сразу следует из теоремы 8.1. Соотношения для абстрактных групп непосредственно следуют из соотношений для действий групп автоморфизмов. Поэтому достаточно провести доказательство уравнений для автоморфизмов конической индукции.

Случай $n = 1$. В этом случае коническое пространство — это «направленная прямая»: окрестностью точки является левая полупрямая, в которой эта точка — правый конец. Непрерывные отображения в такой индукции — это функции, непрерывные слева. Автоморфизм, как непрерывная биекция на себя, может быть только и любой строго монотонной непрерывной действительной функцией, неограниченной в обе стороны.

Случай $n = 2$. В этом случае конус – индуктор точки – это угол с вершиной в этой точке. Образующие конуса — это стороны угла. У всех конусов индукторов соответственные образующие конуса параллельны. При автоморфизме образующая конуса переходит в образующую его образа. При этом возможно отображение либо в соответствующую образующую, либо — в противоположную. Перейдем в систему координат, оси которой параллельны образующим с началом в некоторой точке $(0, 0)$ и направляющими e, t. На линиях этих векторов порождена индукция направленной прямой. Если U – автоморфизм, то либо

$$U(x, y) = U(xe + yt) = U(0,0) + V(x)e + W(y)t\ ,$$

где V, W — автоморфизмы направленных прямых, либо

$$U(x, y) = U(xe + yt) = U(0,0) + V(x)t + W(y)e\ ,$$

где V, W — их взаимные гомеоморфизмы. С учетом полученного выше множества автоморфизмов направленной прямой это соответствует теореме.

Случай $n = 3$. Для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что все автоморфизмы аффинные, т. е. класс прямых линий инвариант их действия, поскольку группа аффинных автоморфизмов $Rc[n]$ совпадает с расширенным действием группы Лоренца [8]. Это означает, что любой автоморфизм переводит прямые линии только в прямые. Введем термины.

И-конус — конус, объединяющий все индукторы одной точки в $Rc[3]$, (индуктор полной конической индукции).

С-линия — прямая, продолжающая образующую И-конуса.

С-плоскость — плоскость, в каждой точке касательная к некоторому И-конусу.

Т-линия — прямая, идущая внутри И-конуса.

Т-плоскость — плоскость, образованная параллельными Т-линиями.

Р-плоскость — секущая плоскость для И-конусов.

Р-линия — прямая, лежащая в Р-плоскости.

Соответственно, будем обобщенно говорить о *С- объектах, Т-объектах, Р-объектах.*

Лемма 8.1. *Автоморфизм конического пространства $Rc[n]$ непрерывен в топологии $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Предположим, последовательность точек $r(1), r(2), \ldots$ сходится к точке r. Тогда можно построить последовательность вложенных И-конусов $(K(i)|i = 1, \ldots)$ с вершинами в некоторых точках $g(1), g(2), \ldots$ и высотами $H(1), H(2), \ldots$, где $lim_{i\to\infty} g(i) = r$, $\ lim_{i\to\infty} H(i) = 0$, причем все $r(j),\ j \geqslant i$, содержатся внутри конуса $K(i)$. Единственной общей точкой всех конусов является точка r. После применения произвольного автоморфизма u И-конусы $K(1), K(2), \ldots$ перейдут во вложенную систему И-конусов $(u \circ K(i)|i = 1, \ldots)$ с единственной общей точкой $u(r)$. При этом образы $u(r(j)),\ j \geqslant i$, содержатся внутри И-конуса $u \circ K(i)$. Отсюда следует, что $lim_{i\to\infty} u(r(i)) = u(r)$. □

Лемма 8.2. *Любая Р-прямая является пересечением двух С-плоскостей.*

Доказательство. Рассмотрим Р-прямую L. По определению она не лежит внутри какого-либо И-конуса. Выберем точку r на L, и расположим там вершину И-конуса K, не имеющего с L других точек пересечения. Проведем две касательные плоскости к конусу, содержащие L. Поскольку любая плоскость, касательная к И-конусу , является С-плоскостью, то это докажет лемму. Докажем, что такие плоскости всегда существуют для конуса и прямой, проходящей через вершину с внешней стороны. Рассмотрим плоскость

V кругового сечения конуса K. Возможны два случая: прямая L параллельна V, или — не параллельна. Если прямая параллельна плоскости, то она ортогональна оси конуса. Тогда имеются две образующие конуса K, которые ортогональны прямой L. Плоскости, натянутые на эти образующие и прямую L — искомые касательные. Если прямая не параллельна плоскости, то имеется их точка пересечения s. Пусть круг Z является сечением конуса K плоскостью V. Проведем две касательные из точки s к кругу Z в плоскости V. Обозначим точки касания a и b. Каждая из линий sa и sb касается конуса K в одной из этих точек. Линии ra и rb являются образующими конуса. Поэтому каждая из плоскостей треугольников asr и bsr содержит пересекающиеся образующую и касательную конуса K. Следовательно, — это касательные плоскости к конусу, которые пересекаются по прямой $sr = L$. $\square$

Лемма 8.3. *Любой автоморфизм переводит С-объект в С-объект и Р-объект в Р-объект того же типа. Т-линия переходит в непрерывную линию внутри И-конуса (не утверждается, что в прямую).*

Доказательство. По определению автоморфизма образ и прообраз любого И-конуса является И-конусом. Поскольку биекция строго монотонна по вложению подмножеств, граница (поверхность) И-конуса переходит в поверхность образа. Любая С-линия есть линия касания двух И-конусов, один из которых внутри другого (касание по образующей). Это пересечение двух поверхностей И-конусов, которое переходит в аналогичное касание, т.е. образ С-линии опять С-линия. Тогда С-плоскость переходит в непрерывное множество, состоящее из непересекающихся С-линий. На произвольной С-плоскости B выберем произвольную точку r и проведем через нее С-прямую L, по которой B касается конуса K. По каждой такой прямой С-плоскости касается бесконечно много И-конусов, вершины которых лежат на L. Рассмотрим множество Q_L всех таких И-конусов. Их объединение $K_L = \cup Q_L$ является полупространством, ограниченным плоскостью B. При автоморфизме это объединение конусов перейдет в такое же объединение, а граница полупространства перейдет в границу образа. Следовательно, образ С-плоскости будет С-плоскостью. Таким образом все С-объекты при автоморфизмах переходят в С-объекты того же типа.

По лемме 8.2 образ Р-прямой, проходящей через вершину И-конуса K, является пересечением образов двух С-плоскостей, а это, по доказанному выше, пересечение двух С-плоскостей, внешнее к И-конусу – образу K, т. е. Р-линия. Поскольку на Р-плоскости все линии являются Р-линиями, то при автоморфизме все прямые на Р-плоскости перейдут в прямые. Любые три Р-прямые, пересечение которых образует треугольник, переводятся автоморфизмом в треугольник образов. В силу непрерывности (лемма 8.1) и биективности автоморфизма, этот треугольник образов определяет плоскость, являющуюся образом исходной. Все прямые в образе будут Р-прямыми, поэтому образ остается Р-плоскостью. Внутренность И-конуса переходит при автоморфизме во внутренность И-конуса. Поэтому из леммы 8.1 следует переход Т-линии в непрерывную линию внутри образа И-конуса. $\square$

Лемма 8.4. *Автоморфизмы аффинны на С-объектах и Р-объектах.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для Р-плоскости это доказано при доказательстве леммы 8.3. Поскольку каждая Р-прямая принадлежит какой-то Р-плоскости, то автоморфизм аффинный на ней. На С-плоскости, касательной к И-конусу и, следовательно, не входящей в него, все прямые — либо С-прямые, либо Р-прямые. Каждая из этих прямых переходит при автоморфизме в прямые. Значит, автоморфизм аффинный на С-плоскости. Поскольку каждая из С-прямых входит в какую-нибудь С-плоскость, то и на С-прямых отображение аффинное. □

Лемма 8.5. *Любой Т-объект при любом автоморфизме и конического пространства переходит в Т-объект того же типа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольную Т-плоскость P. По определению имеется И-конус K, ограниченный по высоте круговым сечением Z, который она пересекает по двум образующим L_1, L_2 и вершине A. Пересечение $L_3 = P \cap Z$ является Р-прямой. По лемме 8.4 uL_1, uL_2 являются образующими И-конуса uK, которые пересекаются по его вершине uA, а образ Р-прямой uL_3 является прямой, и лежит в плоскости uZ. Поскольку всю плоскость P можно представить как объединение С-прямых, параллельных L_1, и пересекающих L_2 и L_3, то uP — Т-плоскость. Значит, образ произвольной Т-плоскости является Т-плоскостью. Любая Т-прямая является пересечением двух Т-плоскостей, причем она проходит внутри любого И-конуса, вершина которого принадлежит этой прямой. Свойство принадлежности к внутренности конуса — инвариант любого автоморфизма. Пересечение двух Т-плоскостей переходит в пересечение плоскостей их образов. Следовательно, образ произвольной Т-прямой является Т-прямой. □

Завершение доказательства теоремы 8.1. Из доказанных выше лемм 8.4, 8.5 следует, что при размерности конического пространства 3 все автоморфизмы имеют инвариантный класс прямых линий. А это означает, что они являются аффинными преобразованиями векторного пространства. *Случай* $n > 3$. Заметим, что доказательство для $n = 3$ нигде не использовало отображение конического пространства на себя. Доказано, что гомеоморфный образ трехмерного конического пространства Всегда — аффинное отображение.

Допустим, это доказано для $n = m$. Перейдем к $n = m + 1$. *Математическая индукция.* Выберем некоторый базис: $\mathbb{R}^n = L\{e_0, e_1, \dots, e_m\}$, e_0 —ось И-конуса. Можно записать алгебраическую сумму:

$$\mathbb{R}^n = L\{e_0, e_1, \dots, e_{m-1}\} \oplus L\{e_0, e_1, \dots, e_{m-2}, e_m\}\ .$$

Каждое из слагаемых — m-мерное коническое пространство. При автоморфизме u (или изоморфизме), по предположению индукции, образы этих подпространств будут подпространствами того же типа, причем, отображения аффинные. Из биективности отображения u следует сохранение размерности пространства. Если задана некоторая прямая $l \subset \mathbb{R}^n$, то всегда можно выбрать e_1, e_2 так, чтобы $l \subset L\{e_0, e_1, e_2\}$ и, следовательно, $l \subset L\{e_0, e_1, \dots, e_{m-1}\}$ (Это достигается, например, последовательной ортогонализацией тройки векторов e_0, v, $w - v$, где

w и v — любые две различные точки на прямой l.) Поэтому образ ul будет прямой линией. Это завершает индукцию и доказательство теоремы. $\square$

Список литературы

[1] Koning D. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, 1936

[2] Frucht R. Herstellung von Graphen mit vogegebener abstracten Grouppe. Compositio Math, v. 6 (1938), 239-250

[3] Frucht R. Graphs of degree three with a given abstract group. Canadian J. Math, v. 1 (1949), 365-378

[4] Sabidussi G. Graphs with given group and given graph-theoretical properties. Canadian J. Math, v. 9 (1957), 515-525.

[5] Sabidussi G. On the minimum order of graphs with given automorphism group. Monatsh. Math, v. 63 (1959), 693-696

[6] Izbicki H. Unendliche Graphen endlichen Grades mit vogegebener Eigenschaften. Monatsh. Math, v. 63 (1959),

[7] А. В. Коганов. Индукторные пространства и процессы. ДАН, том 324, ном. 5, 1992г., с 953-958. 298-301.

[8] A. V. Koganov. Processes and Automorphisms on Inductor Spaces. Russian Journal Mathematic Physics, vol 4, nom 3, 1996, s 315-339.

[9] А. В. Коганов. Индукторные пространства, как средство моделирования. "Вопросы кибернетики"(Алгебра, Гипергеометрия, Вероятность, Моделирование) под ред. В. Б. Бетелина, РАН, М., 1999г, С 119-181.

[10] А. В. Коганов. Автоморфизмы конических индукторных пространств. "Вопросы кибернетики"(Алгебра, Гипергеометрия, Вероятность, Моделирование) под ред. В. Б. Бетелина, РАН, М., 1999г, С 182-189.

[11] Коганов А. В. Внутренние изображения действия групп на индукторных пространствах. Математика. Компьютер. Образование. Вып. 8. Сборник научных трудов. Часть 2, М. Прогресс-Традиция. 2001; с.с. 489-495.

[12] А. В. Коганов. Локальные операторы и дифференцирование на индукторных пространствах. “Математика. Компьютер. Образование” вып.9, часть 2, сб. трудов, R& C-Dynamica, М.— Ижевск, 2002, с. 373-384