ПЕРЕХОД ОТ РИМАНОВОЙ К ПСЕВДОРИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ ЧЕРЕЗ КВАЗИКОНИЧЕСКУЮ ИНДУКЦИЮ

А. В Коганов
НИИСИ РАН, Москва[1]

1. Введение

В математической модели пространства-времени специальной теории относительности (СТО) особую роль играют конические структуры в четырехмерном действительном линейном пространстве. События ассоциированы с точками четырехмерия. Описание причинно-следственной связи между событиями основано на их относительном расположении. Событие – причина должно лежать в конусе прошлого события – следствия. Эти структуры подробно изложены, например, в [1, 2, 3]. На инвариантный характер конических причинно-следственных структур в СТО особо указано в [3] как на обоснование аппарата преобразований Лоренца.

Несколько позже [4; 5] были получены результаты, показывающие, что при определенных условиях инвариантность структуры конусов определяет преобразования Лоренца и соответствующую им инвариантную метрику Минковского однозначно. В работах [4; 5; 6] показано, что при задании в $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 3$ специальной топологии (конической индукции $Rc[n]$) группа автоморфизмов этого пространства является псевдоаффинной (т. е. группой симметрии СТО).

В этой работе будет показано, что конструкцию конической индукции можно обобщить на некоторую окрестность любой внутренней точки произвольного гладкого риманова многообразия. Кратко метод такого обобщения изложен в [7]. Возникающая структура подмножеств многообразия названа *квазиконической* индукцией. При этом в касательном пространстве каждой точки данной области возникают (как вторичные инварианты локальных автоморфизмов) локальные метрики Минковского и Лоренца, подробно исследованные в [1]. Это позволяет говорить о построении локальных моделей общей теории относительности на основе обобщения конической индукции для произвольного гладкого многообразия с римановой метрикой. Переход к глобальным квазиконическим индукциям на всем многообразии (и возможность такого перехода) в данной работе не рассматривается.

2. Коническая индукция в евклидовом пространстве

Опишем базовую конструкцию конической индукции в евклидовом пространстве. Общее понятие индукторного пространства приведено, например, в [6]. Каждое индукторное пространство наделяет множество точек (элементов), называемое носителем, системой подмножеств с одной выделенной точкой в каждом. Пара, состоящая из подмножества и точки в нем, называется элементом индукции. Совокупность элементов индукции называется отношением индукции на носителе. При выполнении некоторых дополнительных условий (см. [6]) носитель называется *индукторным пространством*, а отношение индукции называется *индукцией* на пространстве. Для нас будет существенен некоторый частный подкласс индукторных пространств, который в данной работе будет определен непосредственно без общей конструкции.

[1] Поддержано РФФИ, проект № 07-01-00101-а

Автоморфизмом индукторного пространства называется биекция носителя на себя, при которой образом и прообразом каждого элемента индукции является некоторый элемент той же индукции. Автоморфизмы образуют группу. В [6] показано, что любая абстрактная группа изоморфна группе изоморфизмов некоторого индукторного пространства.

Носителем для конической индукции является евклидово пространство $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$ с базисом $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$, т. е. $\mathbb{R}^{n+1} = \langle e_0, e_1, \ldots, e_n \rangle$.

Индуктор точки $x = x_0e_0 + x_1e_1 + \ldots x_ne_n$ имеет вид

$$C(x) = \left\{ y \middle| y_0 - x_0 \le 0 \,\&\, (y_0 - x_0)^2 - \sum\nolimits_{i=1,\ldots,n} (y_i - x_i)^2 \ge 0 \right\} . \qquad (a.1)$$

Это сферический конус с осью $A(x) = \{x - y_0e_0 \mid y_0 \ge 0\}$ и вершиной в точке x .

Для такой индукции доказано $[5,6]$, что группа ее автоморфизмов при размерности пространства $n+1 \ge 3$ совпадает со стандартным действием группы Лоренца в этих осях координат, расширенной аффинными сдвигами и равномерными растяжениями в $\mathbb{R}^{n+1}$, а также ортогональными поворотами и (раздельными) инверсиями осей в $\mathbb{R}^n = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$. Это расширение назовем аффинной группой Лоренца. Заметим, что все порождающие операторы расширения (кроме растяжения) суть евклидовы изометрии в $\mathbb{R}^{n+1}$.

При размерностях $n+1=1$ или 2 группы автоморфизмов значительно шире и не входят в наше рассмотрение. Эти группы описаны $[6]$.

Важным техническим замечанием для математической физики является тот факт, что в указанной теореме телесный угол при вершине конуса может быть любым. Конус в этом случае задается неравенством

$$C(x) = \left\{ y \middle| y_0 - x_0 \le 0 \quad \& \quad c^2 (y_0 - x_0)^2 - \sum\nolimits_{i=1,\ldots,n} (y_i - x_i)^2 \ge 0 \right\} , \qquad (a.2)$$

где параметр c играет роль скорости света для преобразований Лоренца в теории относительности. Это известная запись светового конуса в прошлое (область причинной зависимости для события x). Таким образом, в $[5,6]$ фактически доказана гипотеза Александрова-Пименова о том, что геометрия области причинности определяет СТО.

Параметр c с точки зрения геометрии Евклида определяет тангенс угла между образующей и осью при вершине конуса (рисунок 1). Поэтому, существует выражение для скалярного произведения направляющих векторов u, v высоты и образующей, соответственно, через c :

$$(u,v) = \left(c^2 + 1\right)^{-1/2} . \qquad (a.3)$$

Тогда определение конуса (a2) можно записать в форме

$$C(x) = \left\{ y \middle| (y - x, e_0) \ge \|y - x\| \left(c^2 + 1\right)^{-1/2} \right\} . \qquad (a4)$$

Единственной инвариантной квадратичной метрикой для аффинной группы Лоренца является псевдоевклидова метрика Минковского. Таким образом, система индукторов, построенная в евклидовой метрике, порождает псевдоевклидову метрику в форме инварианта своей группы автоморфизмов. Этот метод может быть перенесен локально на произвольное гладкое риманово многообразие.

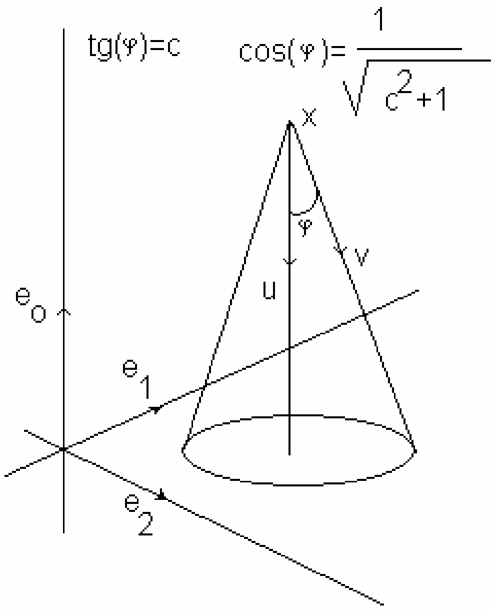

Рис.1. Индуктор конического трехмерного пространства.

3. Квазиконическая индукция на римановых многообразиях

Конструкция конической индукции допускает естественное обобщение на произвольное n-мерное риманово пространство X с положительно определенным метрическим тензором $g(x)=\left(g(x)_{i,j}\right), x\in X,$ и коэффициентами Кристофеля $\Gamma=\Gamma^i_{j,k}$. Такую обобщенную конструкцию назовем *квазиконическим* пространством $Rc\left[n\mid g\right]$.

Для построения квазиконического индукторного пространства необходимо задать семейство геодезических $u(x)$, проходящих через каждую точку $x\in X$, и полученных из одной геодезической $u(x_0)$, проходящей через условно выделенную точку $x_0\in X$, параллельным переносом направляющего вектора вдоль геодезической, связывающей точки x_0 и x . Такой перенос однозначно определен в области пространства, где каждые две точки связаны ровно одной геодезической (назовем максимальную такую область *геодезической компонентой* $H(x_0)$ пространства X в точке x_0 . Поскольку точка x_0 имеет окрестность, гомеоморфную евклидовому шару, то $H(x_0)$ не пуста, и точка x_0 в ней внутренняя. Дальнейшие построения будут вестись в одной геодезической компоненте. Далее, эти геодезические u будем записывать через параметр $t\in\mathbb{R}_+$.

Квазиконическая окрестность (индуктор) $S(x)$ точки $x\in X$ определяется как теоретико-множественное объединение геодезических $v(x)$, проходящих через эту точку, и удовлетворяющих в параметрической записи по параметру s системе дифференциальных уравнений и неравенств

$$\left(\frac{dv(x)}{ds}\right)^T_s g(v(x,s))\left(\frac{du(v(x,s))}{dt}\right)_{t=0} M(x,s)\ge\left(c^2+1\right)^{-1/2} \qquad (1)$$

где M — нормировка векторов (производных по параметру) по модулю в локальном скалярном произведении:

$$M(x,s) = \left(\left\| \frac{dv(x)}{ds} \right\|_s \cdot \left\| \frac{du(v(x,s))}{dt} \right\|_{t=0} \right)^{-1} = \qquad (1a)$$

$$= \left(\left(\left(\frac{dv(x)}{ds} \right)^T g(v(x,s)) \left(\frac{dv(x)}{ds} \right) \right)_s \cdot \left(\left(\frac{du(v(x,s))}{dt} \right)^T g(v(x,s)) \left(\frac{du(v(x,s))}{dt} \right) \right)_{t=0} \right)^{-1/2} .$$

Константа c — определяет тангенс угла при вершине конуса в касательном пространстве (в ТО она играет роль скорости света). Неравенство (1) является аналогом неравенства (а.4) предыдущего раздела (рисунок 2).

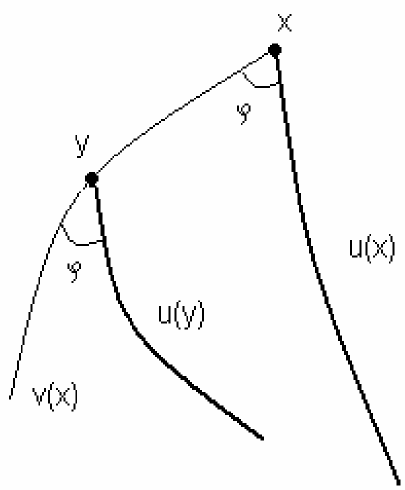

Рис. 2. Геодезические оси (u) и образующие (v) индуктора квазиконической индукции на римановом многообразии.

$v(x)|_{s=0} = x$.

$$\frac{d^2 v(x)}{ds^2} + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} \frac{dv(x)_j}{ds} \cdot \frac{dv(x)_k}{ds} = 0 \quad , \qquad (2)$$

где $i, j, k \in \{0;1;\ldots;n-1\}$, $s \in \mathbb{R}_+$.

Уравнения (2) при всех $x \in H(x_0)$ задают геодезические $v(x) = v(x,t), t \in \mathbb{R}_+$, каждая из которых начинается в своей точке x при $t = 0$. Фиксированное семейство геодезических $u(x) = u(x,t)$ также удовлетворяет аналогичным уравнениям

$$\frac{d^2 u(x)}{dt^2} + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} \frac{du(x)_j}{dt} \cdot \frac{du(x)_k}{dt} = 0 \quad , \qquad (3)$$

где $u(x)|_{t=0} = x$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Если обозначить (единственную) геодезическую, соединяющую точки x_0 и x

$$w(x) = w(x,p),\ p \in [0;1], \quad w(x,0) = x_0 , \quad w(x,1) = x; \qquad (4)$$

то условие параллельного переноса направляющего вектора геодезических $u(x)$:

$$\left(\frac{dw(x)}{dp}\right)_p^T g(w(x,p))\left(\frac{du(w(x,p))}{dt}\right)_{t=0} Q(x,p) =$$
$$= \left(\frac{dw(x)}{dp}\right)_{p=0}^T g(x_0)\left(\frac{du(x_0)}{dt}\right)_{t=0} Q(x,0) \tag{5}$$

где Q — нормировка по модулю векторов производных в локальном метрическом тензоре:

$$Q(x,p) = \left(\left\| \frac{dw(x)}{dp} \right\|_p \cdot \left\| \frac{du(w(x,p))}{dt} \right\|_{t=0} \right)^{-1} = \tag{5a}$$
$$= \left(\left(\left(\frac{dw(x)}{dp}\right)^T g(w(x,p)) \left(\frac{dw(x)}{dp}\right) \right)_p \cdot \left(\left(\frac{du(w(x,p))}{dt}\right)^T g(w(x,p)) \left(\frac{du(w(x,p))}{dt}\right) \right)_{t=0} \right)^{-1/2}.$$

Уравнение (5) означает, что угол стандартной геодезической u с геодезической линией w перехода из точки x_0 в точку x постоянен во всех точках траектории переноса. Значение угла определяется через скалярное произведение касательных векторов. Если пространство без кручения, то параллельный перенос транзитивен по точкам внутри $H(x_0)$. Далее будем предполагать отсутствие кручения. Поскольку определение геодезической переноса w зависит от начальной точки переноса x_0, то иногда будем явно указывать эту точку: w_{x_0}.

Неравенство (1) — условие принадлежности геодезической v криволинейному конусу $S(x)$. Оно выражает требование, чтобы угол данной геодезической v со стандартной геодезической u, проходящей через ту же точку, не превосходил заданного значения в любой точке этой геодезической. В качестве индикатора угла принимается значение скалярного произведения касательных векторов в локальном метрическом тензоре данной точки. Существование решений указанной системы (1)(2)(3)(5) следует из того факта, что из точки гладкого многообразия в любом касательном направлении выходит геодезическая линия, и из следующей теоремы.

Теорема 1. Геодезическая линия $v(x,s)$, которая удовлетворяет неравенству (1) в точке x при $s=0$, удовлетворяет ему в любой своей точке внутри области $H(x_0)$. Более того, значение левой части неравенства постоянно на геодезической в этой области.

Доказательство. В области $H(x_0)$ между точками x и $v(x,s)$ проходит ровно одна геодезическая линия $w_x(v(x,s),p)$. Поэтому $w_x(v(x,s),p)=v(x,p)$. Но тогда, если правая часть (1) при $s=0$ равна $\theta \le (c^2+1)^{-1/2}$, то и правая часть (5) также равна θ. Но из транзитивности параллельного переноса и условия (5) тогда левая часть (5) совпадает с левой частью (1) при $p=s$ и равна θ. ■

Следствие. В области $H(x_0)$ существует отношение индукции с элементами $[x,S(x)]_S$. Внутри этой области оно удовлетворяет требованию транзитивного объединения, т. е. является индукцией $[H(x_0),S]$.

Такая система окрестностей в касательном пространстве любой точки $x \in H(x_0)$ отображается в коническую индукцию. По доказанному, в $[5,6]$ это означает, что локальной группой инвариантности в таких точках будет группа Лоренца, а локально инвариантной метрикой будет метрика Минковского.

Преобразования пространства X, которые обеспечивают локальную инвариантность конической индукции в касательном пространстве к некоторой точке, обеспечивают инвариантность волнового уравнения в этой точке с параметром скорости распространения c из уравнения (1). При размерности пространства 3 и выше дифференциал такого преобразования в этой точке будет оператором Лоренца. В частности, это относится к автоморфизмам квазиконической индукции S .

Замечание 1. Требование транзитивности параллельного переноса может не выполняться в пространствах с ненулевым кручением. Тогда верно более слабое утверждение, чем теорема 1. Для каждой точки $x \in H(x_0)$ и любого значения $\theta < (c^2+1)^{-1/2}$ имеется решение системы (1-5), в котором левая часть (1) при $s=0$ равна θ, и выполняется неравенство (1) при $s<\delta(\theta)$ для некоторого положительного ограничения $\delta(\theta)$. Транзитивность этого отношения индукции утверждать в общем случае нельзя. Но в касательном пространстве ему соответствует коническая индукция с конусами, которые не включают в себя образующих (внутренность геометрического конуса). Для такой структуры в $\mathbb{R}^n$ группа автоморфизмов также совпадает с аффинным расширением группы Лоренца.

`Доказательство`. Обозначим $\theta(s)$ значение левой части (1) при различных значениях параметра s геодезической линии $v(x,s)$. По определению гладкого многообразия эта функция непрерывная. При этом $\theta(0)=\theta$, а эта величина строго меньше, правой части. Отсюда сразу следует существование положительного значения $\delta(\theta)$. Справедливость теоремы об изображении конической индукцией расширенной группы Лоренца, если конические индукторы заданы открытыми в евклидовой топологии, следует из того, что замкнутый конус можно получить как пересечение бесконечного множества вложенных открытых конусов. А эта операция инвариантна относительно группы автоморфизмов соответствующей индукции. Таким образом, автоморфизмы совпадают с автоморфизмами конической индукции. ■

Замечание 2. Для евклидовой метрики в касательном пространстве точки x_0 определен ортонормальный базис, построенный из направляющего вектора оси стандартного конуса и векторов ортогональной гиперплоскости. В каждой точке $x \in H(x_0)$ можно построить аналогичный базис путем параллельного переноса базиса из касательного пространства точки x_0. После этого в такой точке можно задать пару метрических тензоров вида $(g)=diag(1,1,\dots,1)$ и $(q)=diag(1,-1,\dots,-1)$. С учетом связности на многообразии эти тензоры соответствуют римановой и псевдоримановой метрикам, связанным квазиконической индукцией по следствию из теоремы 1. Множество геодезических линий в этих метриках совпадает на $H(x_0)$. Указанные базисы можно построить относительно псевдоримановой метрики. Поэтому замена тензора (q) на (g) определяет обратный переход от псевдориманова пространства к риманову пространству, в котором определена соответствующая квазиконическая индукция.

Литература

1. Дж. Бим, П. Эрлих. Глобальная лоренцева геометрия. М., Мир, 1985, 400с. (пер. с John Beem, Paul Ehrlich. Global Lorentzian Geometry.// Dep. of Math. Univ. of Missouri, Columbia, Mesouri, New York and Basel, 1981.)

2. Либшер Д.Э. Теория относительности с циркулем и линейкой. (Перевод.) "Мир",М.,1980;149с. (Liebsher, D.-E. (1977), Relativitätstheorie mit Zirkel und Linien, Akademie-Verlag, Berlin.)

3. Р. И. Пименов. Основы теории темпорального универсума. Уральское отд. АН СССР, Сыктывкар, 1991.

4.A. V. Koganov. Processes and Automorphisms on Inductor Spaces. Russian Journal Mathematic Physics, vol 4, nom 3, 1996, s 315-339.

5. А. В. Коганов. Автоморфизмы конических индукторных пространств. "Вопросы кибернетики" (Алгебра, Гипергеометрия, Вероятность, Моделирование) под ред. В. Б. Бетелина, РАН, М., 1999г, С 182-189.

6. A. V. Koganov. Faithful Representations of Groups by Automorphisms of Topologies. Russian Journal of Mathematical Physics, vol. 15, No 1, 2008, s. 66-76

7. А. В. Коганов. Связь римановой и псевдоримановой геометрии через квазиконические индукторные пространства. 13-я российская гравитационная конференция — международная конференция по гравитации, космологии, и астрофизике. 23-28 июня 2008г. Тезисы докладов. РУДН, 2008, с. 37—38

\\

Ссылка на статью — публикацию:

А. В Коганов. Переход от римановой к псевдоримановой геометрии через квазиконическую индукцию. Сб. н. т. 3-го Международного симпозиума «Симметрии: теоретический и методический аспекты». Астрахань, 2009, ОГО УДПО АИПКП, ISBN 978-5-8087-0248-6, с. 43-49

Пояснение: Данный вариант содержит более поздние формальные изменения и предназначен для электронной публикации. Эти изменения не затрагивают содержания статьи.

Дополнительная литература.

Близкие результаты: С. У. Хокинг, А. Р. Кинг, П. Дж. МакКарти и Д. Б.Маламент.

Они показали (1976), что автоморфизмы топологии, порожденной пересечениями сфер и двусторонних причинно-следственных конусов, дают симметрию Лоренца и трансляции. Также они перенесли эту конструкцию на многообразия Римана через геодезические и касательные пространства, а потом сделали переход к псевдоримановой метрике.

Отличие от моих результатов: я делаю это же через коническую индукцию, которая содержит меньше окрестностей, чем указанные топологии, и конусы в индукции односторонние. Из моих результатов следует их теорема, а обратно нет. Это так, поскольку любой автоморфизм указанной топологии заведомо является и автоморфизмом конической индукции (она содержится в топологии), а обратный переход требует специального доказательства.

Выражаю благодарность А. Л. Круглому, который познакомил меня с этими работами после моего доклада на семинаре «Модели времени», и руководителю семинара А. П. Левичу за предоставленную возможность сделать этот доклад.

Ссылки.

8. S. W. Hawking, A. R. King, P. J. McCarthy. A new topology for curved space-time which incorporates the causal, differential, and conformal structures. // J. Math. Phis., vol. 17, No 2, feb.1976, s. 174-181.

9. David B. Malament. The class of continuous timelike curves determines the topology of spacetime. // J. Math. Phis., vol. 18, No 7, july.1977, s. 1400-1404.