



Несмотря на широкое использование, принцип причинности обычно означает лишь запаздывание следствия относительно причины. Однако тот факт, что в простых ситуациях положение причин и следствий очевидно без измерения запаздывания, свидетельствует о явной асимметрии этих понятий. Из решения задачи формального определения данной асимметрии родился метод причинного анализа, позволяющий определять направление и силу причинной связи между подсистемами. Особенно интересно применение аппарата причинного анализа к квантовым запутанным состояниям, привлекающим к себе внимание именно необычностью квантовых корреляций с точки зрения принципа причинности. Считается, что квантовые корреляции осуществляются мгновенно, но поскольку нелокальный канал при коммуникации должен быть обязательно дополнен классическим, нарушение причинности экспериментально неverifiedируемо. Применение причинного анализа дает возможность изучить эту ситуацию строгим и достаточно универсальным образом. Кроме того, причинный анализ позволяет раскрыть особенности поведения асимметричных запутанных состояний под воздействием декогеренции - основном препятствии на пути построения полноценных квантовых компьютеров.

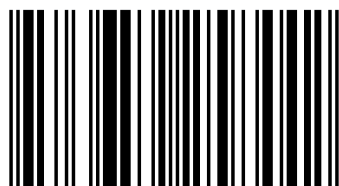
Евгений Киктенко  
Сергей Коротаев

# Причинность в квантовом мире

Исследование запутанных состояний с  
помощью квантового причинного анализа

**Евгений Киктенко**

Аспирант МГТУ им. Н.Э.Баумана по направлению Теоретическая физика, ведущий инженер Центра геоэлектромагнитных исследований ИФЗ РАН, г. Троицк.



978-3-659-25844-2

**Евгений Киктенко  
Сергей Кортаев**

# **Причинность в квантовом мире**

**Исследование запутанных состояний с  
помощью квантового причинного анализа**

**LAP LAMBERT Academic Publishing**

## **Impressum / Выходные данные**

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу <http://dnb.d-nb.de>.

Любые названия марок и брендов, упомянутые в этой книге, принадлежат торговой марке, бренду или запатентованы и являются брендами соответствующих правообладателей. Использование названий брендов, названий товаров, торговых марок, описаний товаров, общих имён, и т.д. даже без точного упоминания в этой работе не является основанием того, что данные названия можно считать незарегистрированными под каким-либо брендом и не защищены законом о брендах и их можно использовать всем без ограничений.

Coverbild / Изображение на обложке предоставлено: [www.ingimage.com](http://www.ingimage.com)

Verlag / Издатель:

LAP LAMBERT Academic Publishing

ist ein Imprint der / является торговой маркой

AV Akademikerverlag GmbH & Co. KG

Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Deutschland / Германия

Email / электронная почта: [info@lap-publishing.com](mailto:info@lap-publishing.com)

Herstellung: siehe letzte Seite /

Напечатано: см. последнюю страницу

**ISBN: 978-3-659-25844-2**

Copyright / АВТОРСКОЕ ПРАВО © 2012 AV Akademikerverlag GmbH & Co. KG

Alle Rechte vorbehalten. / Все права защищены. Saarbrücken 2012

## Содержание

Введение.....	3
Глава 1. Причинный анализ.....	7
1.1. Предпосылки.....	7
1.2. Классический причинный анализ.....	8
1.3. Квантовый причинный анализ.....	13
Глава 2. Непричинные состояния.....	17
2.1. Чистые состояния.....	17
2.2. Состояние Гринберга-Хорна Цайлингера.....	18
2.3. W-состояние.....	18
2.4. Диагональные состояния Белла.....	18
2.5. Состояния Вернера.....	20
2.6. Максимально запутанные смешанные состояния.....	23
Глава 3 Причинные состояния.....	26
3.1. Состояние Коффмана-Кунду-Вуттерса.....	26
3.2. WRг-состояние.....	27
3.3. Квантово-классические состояния.....	28
3.4. Термально-запутанные состояния в неоднородном магнитном поле.....	31
Глава 4. Асимметричная декогеренция.....	41
4.1. Модели декогеренции.....	41
4.2. Декогерированные состояния Белла.....	42
4.3. Декогерированное состояние Гринберга-Хорна Цайлингера.....	45
4.4. Декогерированное W-состояние.....	48
4.5. Декогерированное квантово-классическое состояние.....	51
4.6. Декогерированное состояние Коффмана-Кунду-Вуттерса.....	54
4.7. Декогерированное WRг-состояние.....	61
Глава 5. Запутанность и причинность при взаимодействии двухуровневого атома с электромагнитным полем.....	68
5.1. Модель взаимодействия.....	68
5.2. Результаты вычислений.....	70
5.3. Обсуждение.....	74
Глава 6. Телепортация.....	76
6.1. Протокол трехкубитной телепортации.....	76
6.2. Трактовка тензорного произведения.....	78
6.3. Обратновременная трактовка.....	82
Глава 7. Квантовая томография.....	86
7.1. Сущность томографии.....	86
7.2. Квантово-томографический причинный анализ.....	87
7.3. Примеры анализа двухкубитных запутанных состояний.....	87
Глава 8. Промежуточные итоги.....	92
Заключение.....	96
Литература.....	98



## Введение

Причинность является одним из ключевых физических принципов. С одной стороны, в теоретических задачах принцип причинности позволяет выбрать физически реализуемое решение из набора математически допустимых. С другой стороны, при экспериментальном исследовании сложных систем осознание причинно-следственных взаимосвязей является первым этапом при построении феноменологической модели.

Несмотря на то, что принцип причинности повсеместно используется в физике, он обычно не означает ничего более запаздывания следствия относительно причины. Однако запаздывание является необходимым, но не достаточным условием причинной связи. Как зачастую приходится на суде восклицать адвокатам: «Post hoc non est propter hoc!». Сами понятия причины и следствия остаются формально не определенными. В теоретических задачах это может вести к недоразумениям, а при исследовании сложных явлений – к серьезным ошибкам.

Но если в классической физике эти трудности, так или иначе, преодолевается, то в квантовой механике они приобретают принципиальный характер. Теория относительности не допускает связь через пространственно-подобный интервал. Именно поэтому, с момента своего открытия в 30-х годах, явление квантовой нелокальности привлекает внимание кажущимся нарушением принципов относительности и причинности. Действительно, квантовые корреляции осуществляются через пространственно-подобный интервал. Это не противоречит теории относительности именно благодаря отсутствию каких-либо локальных носителей взаимодействия. Но это остается странным, потому что такие корреляции влекут возможность обращения временного порядка событий. Обычно этот вопрос обходится, считая нелокальные (квантовые) корреляции непричинными. Иногда приходится слышать, что квантовый мир вообще беспричинен. Но это находится в противоречии с самой возможностью передачи квантовой информации. Обойти его можно было потому, что с самого начала было осознано, что квантовый нелокальный канал может передавать только неизвестную информацию, следовательно, для коммуникации обязательно нужен вспомогательный классический канал. Поэтому для практики вопрос стал несущественным. Но как выяснилось, стал только на время.

В 1980 г. Дж. Крамер выдвинул элегантную транзакционную интерпретацию квантовой нелокальности, опирающуюся на теорию прямого межчастичного взаимодействия Уиллера-Фейнмана и ее обобщение на квантовые амплитуды [1]. Он осторожно указывал, что это только интерпретация, позволяющая объяснить все основные квантовые явления, но не предсказывать какие-либо новые [2]. Но его идея оказалась много богаче. Дж. Крамер был первым явно различившим (хотя лишь на вербальном уровне) принципы сильной и слабой причинности. Последняя влечет возможность опережающих корреляций, но только связанных с неизвестными состояниями или, в другой терминологии, с истинно случайными процессами. Слабая

причинность допускает возможность получения некоторой информации из будущего без хорошо известных классических парадоксов, поскольку эта информация касается только случайной составляющей, не predeterminedной предшествующей эволюцией (наблюдатель может узнать заранее только то, на что нельзя повлиять). Это позволило Элитзуру и Долеву предложить экспериментальное детектирование обращенных во времени причинных событий, а именно запутанности квантовых состояний частиц до их взаимодействия [3]. Другой путь учета обращенных по времени корреляций был предложен и экспериментально проверен в приложении к квантовой телепортации Лафорестом и др.[4]. В этом случае наблюдатель узнает о факте обращенного во времени взаимодействия в результате постселекции (постфактум). Вскоре независимо другая группа исследователей (Ллойд и др. [5]) также поставила эксперимент с телепортацией, где на основе постселекции был доказан не только факт эволюции частицы в обратном времени (ее путешествия во времени!), но и продемонстрировала отсутствие классического «парадокса дедушки». Новейший эксперимент группы Ма-Цайлингера с обменом запутанности прямым образом показал причинное воздействие случайного будущего на прошлое через времениподобный интервал [6]. Подчеркнем, что это значительно более яркий результат, чем корреляции через пространственноподобный интервал, где предположение о не причинном характере квантовых корреляций было уязвимо с точки зрения факта передачи квантовой информации от входа к выходу, но, по крайней мере, соответствовало духу СТО. Наконец, причинность в обратном времени была обнаружена и использована для прогноза крупномасштабных случайных процессов в большой серии экспериментов по макроскопической запутанности [7-20].

Таким образом, на уровне квантовой информации, по крайней мере, в некоторых явлениях, причинность не исчезает, а приобретает совершенно удивительную независимость от направления времени. Этого достаточно, чтобы заняться квантовой причинностью всерьез, чему и посвящена эта книга.

Оказывается причинности можно дать полностью формальное определение независимое от временных соотношений. Самое интересное, возникающий формализм не является продуктом чистой абстракции (что нормально в математике), а является переложением на математический язык обычной человеческой интуиции, во всяком случае, если этот человек — физик.

В первой главе мы излагаем этот довольно простой формализм — метод причинного анализа, причем начиная с классического уровня. Необходимость классического вступления оправдана ясным соответствием интуиции и тем, что классический причинный анализ, хотя и не так давно, но стал инструментом экспериментальной физики. После этого квантовое обобщение представляется уже естественным.

Во второй главе на ряде примеров демонстрируется применение метода к симметричным состояниям, где причинность отсутствует, но, тем не менее, могут быть получены интересные количественные характеристики смешанных

состояний. То есть аппарат причинного анализа может быть полезен даже тогда, когда причинность отсутствует.

В третьей главе мы переходим к содержательным примерам причинных состояний нарастающей сложности, начиная от чисто иллюстративного получения меры причинности и кончая нетривиальными выводами о характере причинной связи в зависимости от внешнего магнитного поля и температуры. При этом в последнем случае (термально-запутанные состояния в неоднородном магнитном поле) мы демонстрируем полное вычисление меры причинности через гамильтониан и показываем, что выводы не меняются, если выполнять эти вычисления с точностью до качественно несущественного множителя, чем мы и пользуемся в дальнейшем.

Четвертая глава посвящена причинности в процессах декогеренции. Мы убеждаемся, что разные виды декогеренции по-разному, но совершенно определенным образом влияют на причинность, которая в свою очередь, определяет необратимый поток информации от системы к окружению или наоборот. Результаты имеют практический интерес для решения наиболее тяжелой технической проблемы квантовой информации – защиты запутанных состояний от распада при любом взаимодействии с окружением.

В пятой главе рассматривается запутанность и причинность при взаимодействии двухуровневого атома с электромагнитным полем. Хотя рассмотрение ведется в рамках одной лишь модели Джейниса-Каминга, полученные результаты носят общий характер для термальной запутанности, для взаимодействия любых резко разноразмерных подсистем и их мониторинга.

В шестой главе мы рассматриваем различные походы к трехкубитному протоколу квантовой телепортации и выявляем причинность в обратном времени – изумительную черту квантовой причинности, уже имеющую экспериментальное подтверждение, но только начинающуюся осознаваться.

Как известно, квантовая томография дает наиболее прямой путь к измерению матриц плотности, поэтому седьмая глава посвящена особенностям такого экспериментального воплощения причинного анализа.

В восьмой главе приводится обзор и синтез полученных результатов, а ее название «Промежуточные итоги» подчеркивает тот факт, что мы находимся еще в начале большого и интригующего пути.

Надеемся, что предлагаемая вниманию читателей книга будет воспринята с интересом и, возможно, послужит импульсом в развитии их собственных идей и исследований.

Мы отдаем глубокую дань памяти Н.А. Козырева. В свое время для одного из нас (С.К.) знакомство с его работами, непосредственное наблюдение экспериментов и обсуждение с ним проблем причинной механики оказало определяющее влияние на научное мировоззрение и побудило к собственным исследованиям причинных связей в классической и квантовой физике.

Мы благодарим М.Л. Арушанова за сотрудничество и важнейшую помощь на трудной начальной стадии становления причинного анализа, Ю. С. Владимирову и А.П. Левича за плодотворные дискуссии, А.Н. Морозова за постоянное внимание к работе и творческое участие в ее экспериментальном



воплощении, М.Б. Менского за обсуждение проблем квантовой нелокальности, А.К. Федорова и С.О. Юрченко за участие в реализации идеи квантово-томографического причинного анализа. Последний этап исследований выполнялся при поддержке РФФИ (гранты 12-05-00001 и 12-05-98009).

# Глава 1.

## Причинный анализ

### 1.1. Предпосылки

Обычно под принципом причинности не понимается ничего более, чем запаздывание следствия относительно причины. Однако само понятие «причинная связь» остается неопределенными. Вытекающие из этой неопределенности трудности и возможные ошибки связаны с тем, что, как это ни парадоксально принцип причинности в физической литературе почти нигде четко не сформулирован, несмотря на его широкое использование.

В теоретических задачах это может вести к неверным трактовкам даже в классической физике. Например, из того что электрическое поле может быть представлено как свертка магнитного поля по всем предшествующим моментам времени может сложиться представление, что электрическое поле есть следствие магнитного [21], что неверно [22], хотя бы потому, что допустимо симметричное представление магнитного поля через электрическое.

В экспериментальных задачах возможны более серьезные затруднения. В самом деле, стандартная схема ответа на вопрос о классификации процессов как причин и следствий такова. Устанавливается корреляция исследуемой пары (или множества) величин. Если она высока, делается вывод о наличии реальной зависимости, а далее вступает в силу физическая интуиция (например, один процесс один процесс гораздо мощнее другого, значит он – причина), в лучшем случае дополненная оценкой запаздывания. Но если некоторый процесс  $C$  порождает (на таком же интуитивном основании) изолированные друг от друга процессы  $A$  и  $B$ , то между  $A$  и  $B$  может быть тесная корреляция, определенное запаздывание, однако интуиция теперь говорит о том, что их связь не является причинной. Процесс  $C$  может вообще не попасть в поле зрения исследователя, и тогда его интуитивный поход не даст ответа, с которым согласится другой исследователь, который допускает существование  $C$ .

Ненадежность интуитивного подхода привела к тому, что по справедливому замечанию Н.А. Козырева [23] вопрос «почему?» фактически изгнан из точных наук и заменен вопросом «как?». На самом деле любое новое исследование начинается с ответа на первый вопрос (или сопровождается им), но все это остается за рамками формальной теории.

Необходимость формального учета реально существующих причинных связей ощущалась многими исследователями. Можно указать, по крайней мере, на три попытки такого учета, сделанных в работах Г. Рейхенбаха [24], Д. Хейса [25] (классический уровень) и Н. А. Козырева [23] (полуклассический уровень) Однако эти попытки не привели к созданию достаточно универсального аппарата пригодного для оперирования с произвольными физическими переменными или с экспериментальными данными связанными произвольными зависимостями.

Между тем, в простых ситуациях мы легко отличаем причину от следствия, подразумевая, но не измеряя запаздывания (например, причинно-

следственное отношение токов в цепях лампы и фотоэлемента очевидно без всякого измерения запаздывания). Тот факт, что в простых ситуациях положение причин и следствий очевидно без измерения запаздывания, говорит о том, что сами эти понятия асимметричны. Задача заключается в том, чтобы определить эту асимметрию формально и не прибегая к временному соотношению, которое должно быть введено *после* определения как аксиома.

Из решения этой задачи [26], первоначально мотивированного формализацией идей причинной механики [23], родился метод причинного анализа, оказавшийся полезным в широком круге приложений (например, [27-36]). Метод дал формальное определение и количественную меру причинности для классических переменных. Это оказалось плодотворным в построении моделей сложных систем с обратными связями по экспериментальным данным, а также в оценке влияния помехообразующих факторов в реальных открытых системах.

В квантовой механике интуиция, воспитанная повседневным опытом жизни в классическом мире, подводит много чаще. Особо это касается явления квантовой нелокальности, которое с момента своего открытия привлекает к себе внимание именно необычностью квантовых корреляций с точки зрения принципа причинности. Считается, что квантовые корреляции осуществляются мгновенно, но поскольку нелокальный канал при коммуникации должен быть обязательно дополнен классическим, нарушение причинности экспериментально неverifiedируемо. Применение причинного анализа должно дать возможность изучить эту ситуацию строгим и достаточно универсальным образом. Наконец, применение причинного анализа актуально для решения конкретных вопросов физики квантовой информации (наиболее четко сформулированных в [37]), касающихся особенностей поведения асимметричных запутанных состояний.

Однако мы настаиваем, что предлагаемый нами аппарат формализует обычное интуитивное понимание причинности, которое верно хотя бы потому, что без него была бы невозможна повседневная жизнь. Поэтому мы начинаем изложение с классического причинного анализа, после чего квантовый причинный анализ не должен показаться чистой абстракцией. Более того, основные формулы при переходе на квантовый уровень при замене определений энтропий остаются теми же.

## 1.2. Классический причинный анализ

Рассмотрим классические переменные  $A$  и  $B$ , характеризующие соответствующие подсистемы двухсоставной системы  $AB$ , их шенноновские безусловные и условные энтропии:

$$\begin{aligned}
 S(A) &= -\sum_{j=1}^J P(A_j) \log_2 P(A_j), \\
 S(B) &= -\sum_{k=1}^K P(B_k) \log_2 P(B_k),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
S(A|B) &= -\sum_{k=1}^K P(B_k) \sum_{j=1}^J P(A_j|B_k) \log_2 P(A_j|B_k), \\
S(B|A) &= -\sum_{j=1}^J P(A_j) \sum_{k=1}^K P(B_k|A_j) \log_2 P(B_k|A_j),
\end{aligned} \tag{2}$$

где  $P(A_j)$ ,  $P(B_k)$  – вероятность  $j$ -го ( $k$ -го) уровня  $A$  и  $B$  соответственно;  $P(A_j|B_k)$ ,  $P(B_k|A_j)$  – соответствующие условные вероятности. Определим следующие величины: безусловную  $\alpha$  и условную  $\beta$  асимметрии:

$$\alpha = \frac{S(B)}{S(A)}, \quad 0 \leq \alpha \leq \infty; \quad \beta = \frac{S(B|A)}{S(A|B)}, \quad 0 \leq \beta \leq \infty; \tag{3}$$

и функции независимости  $i$ :

$$i_{B|A} = \frac{S(B|A)}{S(B)}, \quad i_{A|B} = \frac{S(A|B)}{S(A)}, \quad 0 \leq i \leq 1. \tag{4}$$

Смысл функций независимости достаточно прозрачен: при  $i_{B|A} = 1$ ,  $B$  не зависит от  $A$ , при  $i_{B|A} = 0$ ,  $B$  является однозначной функцией  $A$ . Другими словами, величины  $1 - i$  определяют односторонние зависимости переменных. Прямая и обратная независимости обязаны совпадать только в предельном случае:  $i_{B|A} = 1 \Leftrightarrow i_{A|B} = 1$ .

Далее введем функцию причинности  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{i_{B|A}}{i_{A|B}}, \quad 0 \leq \gamma \leq \infty \tag{5}$$

Смысл названия легко пояснить реперными значениями  $\gamma$ . При  $\gamma = 0$   $B$  является однозначной функцией  $A$ , но не наоборот. Можно толковать это как предельно необратимый процесс  $A \Rightarrow B$ . При  $\gamma = 1$   $A$  и  $B$  в одинаковой степени зависят друг от друга, что естественно отождествить с отсутствием причинности. При  $\gamma = \infty$   $A$  является однозначной функцией  $B$ , но не наоборот. Можно толковать это как предельно необратимый процесс  $B \Rightarrow A$ .

Рассмотрим пространство параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $i_{B|A}$  ( $\gamma = \beta / \alpha$  эквивалентно (5)), изображенное на рис.1а. В этом пространстве можно получить классификацию любых типов взаимосвязи  $A$  и  $B$ , каждая зависимость изображается точкой. Анализируя предельные случаи и используя обратимость информации:

$$I = S(B) - S(B|A) = S(A) - S(A|B), \tag{6}$$

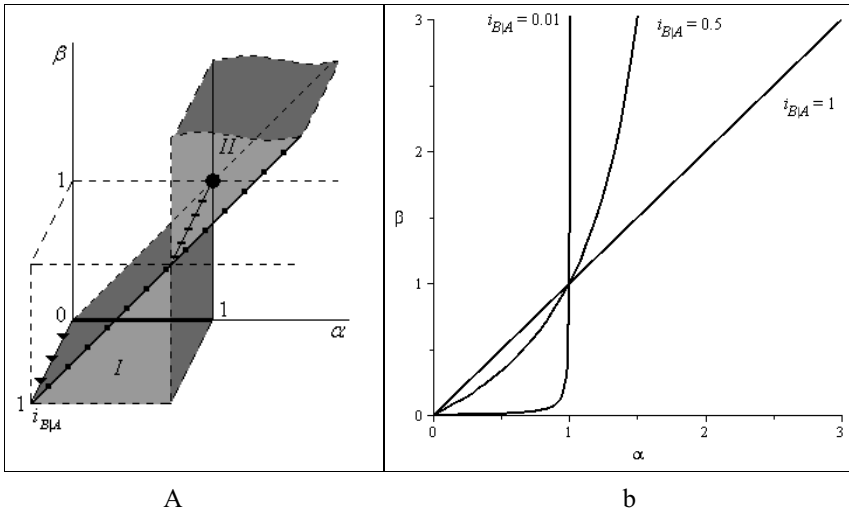
Легко доказать, что запрещенными являются: 1) область  $\alpha < 1$ ,  $\gamma \geq 1$ ; 2) область  $\alpha > 1$ ,  $\gamma \leq 1$ ; 3) плоскость  $\beta = 1$  за исключением линии пересечения с плоскостью  $\alpha = 1$ ; 4) плоскость  $\alpha = 1$  за исключением линии пересечения с плоскостью  $\beta = 1$  и за исключением линии пересечения с плоскостью  $i_{B|A} = 0$ ;

5) плоскость  $\beta=0$  за исключением отрезка оси  $\alpha[0,1]$  и оси  $i_{B|A}$ ; 6) плоскость  $\alpha=0$  за исключением оси  $i_{B|A}$ ; 7) плоскость  $i_{B|A}=0$  за исключением линии  $\alpha=1$  и отрезка оси  $\alpha[0,1]$ ; 8) плоскость  $i_{B|A}=1$  за исключением линии  $\gamma=1$ ; 9) плоскость  $\gamma=1$  за исключением оси  $i_{B|A}$ , линии  $i_{B|A}=1$  и линии  $\alpha=\beta=1$ .

Поскольку трехмерная диаграмма на рис. 1а не позволяет увидеть детали границ запрещенных и разрешенных областей удобно воспользоваться соотношением, легко выводимым из (3) и (4):

$$\beta = \frac{\alpha i_{B|A}}{\alpha(i_{B|A} - 1) + 1}. \quad (7)$$

Таким образом, все точки лежат на одной поверхности (её сечения представлены на рис. 1б).



**Рис. 1.** (а) Классическая энтропийная диаграмма ( $I$  – нормальная причинность,  $II$  – обращенная причинность,  $\dashv$  – линия  $B = \text{const}$ ,  $\text{—}$  – линия однозначных функций,  $\dashv$  – линия независимости,  $\dashv$  – адиабата,  $\bullet$  – взаимно-однозначная точка). (б) Сечения поверхности возможных вариантов взаимосвязи классических процессов в пространстве  $(i_{B|A}, \alpha, \beta)$  плоскостями  $i_{B|A} = \text{const}$ .

В разрешенном пространстве можно выделить, исходя из смысла параметров следующие области:

- Область нормальной причинности:  $\gamma < 1, \beta < 1, \alpha < 1$ .
- Область обращенной причинности:  $\gamma > 1, \beta > 1, \alpha > 1$ .
- Линия  $B$  – констант:  $B = \text{const}$  независимо от  $A$ .
- Линия однозначных функций:  $i_{B|A} = 0, \beta = 0, 0 < \alpha < 1$ . Здесь  $S(B|A) = 0$ ,

т.е.  $B$  полностью определяется  $A$ , но не наоборот.

- Линия независимости:  $i_{B|A} = 1, \gamma = 1$ .
- Взаимно-однозначная точка:  $i_{B|A} = 0, \alpha = \beta = 1 (S(B|A) = S(A|B) = 0)$ .
- Адиабата:  $\alpha = \beta = 1$ , что соответствует изэнтропийному процессу. Этого достаточно для формального определения причинности.

**Определение 1.** Причиной  $A$  и следствием  $B$  называются переменные, для которых  $\gamma < 1$ .

Анализируя смысл величины  $\gamma$  нетрудно увидеть, что наше определение включает обычное интуитивное понимание причинности (по крайней мере, имея в виду интуицию физика). В самом деле, если мы говорим, что  $A$  – причина, а  $B$  следствие, мы имеем в виду полностью или частично детерминированную зависимость  $B$  от  $A$ , при которой обратная зависимость отсутствует. Наше определение позволяет уточнить: обратная зависимость меньше прямой и насколько именно (полное отсутствие обратной зависимости при конечной прямой невозможно). Известны также функциональные и статистические зависимости не являющиеся причинными. Мы четко фиксируем этот класс:  $\gamma = 1$ . Если изучив статистику произвольно обозначенных переменных  $A$  и  $B$ , мы нашли  $\gamma > 1$ , это просто означает, что  $B$  является причиной,  $A$  – следствием. Кроме полной формальности наше определение имеет очевидное преимущество количественной меры перед общеупотребительной качественной. На теоретических и множестве экспериментальных примеров классических задач (например [27-36]) было показано, что такое формальное определение причинности не противоречит ее интуитивному пониманию в простых ситуациях и может быть использовано в сложных.

Далее аксиоматически вводится требование запаздывания  $\tau$  реакции следствия на причину:

$$\gamma < 1 \Rightarrow \tau > 0, \gamma > 1 \Rightarrow \tau < 0, \gamma \rightarrow 1 \Rightarrow \tau \rightarrow 0. \quad (8)$$

Эта аксиома и является принципом классической причинности.

Заметим, что  $\gamma < 1 \Rightarrow \alpha < 1, \gamma > 1 \Rightarrow \alpha > 1$  (обратное неверно, поэтому  $\alpha$  не может использоваться для определения причинности). Это необходимое условие является отображением 7-й теоремы Шеннона [38] об убывании энтропий (1) от входа канала  $A$  ( $B$ ) к его выходу  $B$  ( $A$ ).

Рассмотрим элементарное причинно-следственное звено с причиной  $A$  и следствием  $B$  с точки зрения обмена информации. Согласно теореме о пропускной способности канала при наличии шумов, верхний предел скорости приема информации  $B$  от  $A$ :

$$\sup v_{A \rightarrow B} = \frac{1}{\delta t} \frac{S(B) - S(B|A)}{S(B)}, \quad (9)$$

где  $\delta t$  – длительность элементарного сигнала, числитель максимизируется варьированием распределений  $A$ . Заменяя (9) нижним пределом времени и используя (4), имеем:

$$\inf t_{A \rightarrow B} = \frac{\delta t}{1 - i_{B|A}}. \quad (10)$$

Аналогично, для обратного перехода:

$$\inf t_{B \rightarrow A} = \frac{\delta t}{1 - i_{A|B}}. \quad (11)$$

По условию  $\gamma < 1 \Leftrightarrow 1 - i_{B|A} > 1 - i_{A|B} \Leftrightarrow t_{A \rightarrow B} < t_{B \rightarrow A}$ . Конечная разность (11) и (10) означает, что в любой промежуток времени следствие получает от причины больше информации, чем причина от следствия. Информационный избыток в следствии означает необратимость потока информации. Тогда время получения информационного избытка  $\Delta t$ :

$$\Delta t = \delta t \left( \frac{1}{1 - i_{A|B}} - \frac{1}{1 - i_{B|A}} \right). \quad (12)$$

Считая, что подсистемы  $A$  и  $B$  разделены некоторым конечным эффективным расстоянием  $\Delta r$  можно определить линейную скорость необратимого потока информации  $c_2(A, B) = \Delta r / \Delta t$  (обозначение следует традиции [23], где впервые, хотя и в менее строгих терминах вводился псевдоскаляр хода времени того же смысла):

$$c_2(A, B) = k \frac{(1 - i_{A|B})(1 - i_{B|A})}{i_{A|B} - i_{B|A}} = k \frac{(1 - i_{B|A} / \gamma)(1 - i_{B|A})}{i_{B|A}(1 / \gamma - 1)}, \quad (13)$$

где  $k = \Delta r / \delta t$ . Легко видеть, что знак  $c_2$  взаимно-однозначно связан с величиной  $\gamma$  относительно 1:

$$\gamma < 1 \Leftrightarrow c_2(A, B) > 0, \quad \gamma > 1 \Leftrightarrow c_2(A, B) < 0, \quad \gamma \rightarrow 1 \Leftrightarrow c_2(A, B) \rightarrow \pm\infty, \quad (14)$$

поэтому можно определить причину и следствие и ввести аксиому, подобную (8) в терминах  $c_2$ . Для классического случая обе формулировки полностью эквивалентны.

Хотя наше рассмотрение вопроса является полностью независимым, оно мотивировано работами предшествующих исследователей, особенно Н.А. Козырева [23]. Поэтому мы будем в дальнейшем именовать меру причинности  $c_2$  ходом времени. По Козыреву  $c_2$  имеет смысл скорости причинно-следственного перехода на уровне элементарного звена, т.е. на микроуровне. Наша мера  $c_2$  как скорость необратимого потока информации имеет тот же, только более точно выраженный смысл.

Отметим, что порядок аргументов в записи  $c_2$  выбран так, что  $c_2(A, B) > 0$  означает, что  $A$  – причина,  $B$  – следствие;  $c_2(A, B) = -c_2(B, A)$ . В тех случаях, когда это не может вызвать путаницы аргументы могут опускаться.

Аппарат причинного анализа далее был обобщен на причинную сеть в многосоставной системе [31], было проанализировано влияние на все

параметры  $(\alpha, \beta, i_{B|A}, i_{A|B}, \gamma)$  различных видов помехообразующего воздействия со стороны неконтролируемого окружения, возможностей иных определений классической энтропии отличных от шенноновского и расслоенных пространств определения вероятностей [36]. Метод был тестирован на задачах классической электродинамики [27-30] и на данных разнообразных классических экспериментов (например, [28-36]).

### 1.3. Квантовый причинный анализ

Для квантовых переменных используется энтропия фон Неймана. Вместо (1) и (2) имеем:

$$S(A) = -\text{Tr} \rho_A \log_2 \rho_A, \quad S(B) = -\text{Tr} \rho_B \log_2 \rho_B, \quad (15)$$

$$S(B|A) = S(AB) - S(A), \quad S(A|B) = S(AB) - S(B), \quad (16)$$

где  $\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB}$ ,  $\rho_B = \text{Tr}_A \rho_{AB}$ ,  $S(AB) = -\text{Tr} \rho_{AB} \log_2 \rho_{AB}$ . Заметим, что хотя условные энтропии могут быть, в принципе, непосредственно вычислены через условные плотности по аналогии с (2) [39], практически их проще вычислять косвенным образом согласно (16).

Для запутанных состояний условные энтропии могут быть отрицательны [39, 40]. Поэтому  $-\infty \leq \beta \leq \infty$ ,  $-1 \leq i \leq 1$ ,  $-\infty \leq \gamma \leq \infty$ . В частности, для двухсоставных чистых запутанных состояний из разложения Шмидта следует  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $i_{B|A} = i_{A|B} = -1$ . Энтропийная диаграмма, по сравнению с классическим случаем, расширяется (рис.2). К двум классическим разрешенным областям  $S$  добавляются четыре квантовых  $Q$ :

$$I C \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad 0 \leq i_{B|A} \leq 1, \quad 0 \leq \gamma \leq 1, \quad c_2 > 0;$$

$$II C \quad 1 \leq \alpha \leq \infty, \quad 1 \leq \beta \leq \infty, \quad 0 \leq i_{B|A} \leq 1, \quad 1 \leq \gamma \leq \infty, \quad c_2 < 0;$$

$$IQ \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad 1 \leq \beta \leq \infty, \quad -1 \leq i_{B|A} \leq 0, \quad 1 \leq \gamma \leq \infty, \quad c_2 > 0;$$

$$IIQ \quad 1 \leq \alpha \leq \infty, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad -1 \leq i_{B|A} \leq 0, \quad 0 \leq \gamma \leq 1, \quad c_2 < 0;$$

$$IIIQ \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad -\infty \leq \beta \leq 0, \quad -1 \leq i_{B|A} \leq 0, \quad -\infty \leq \gamma \leq 0, \quad c_2 > 0;$$

$$IVQ \quad 1 \leq \alpha \leq \infty, \quad -\infty \leq \beta \leq 0, \quad 0 \leq i_{B|A} \leq 1, \quad -\infty \leq \gamma \leq 0, \quad c_2 < 0.$$

На трехмерной диаграмме рис.2 трудно, однако, точно показать границы разрешенных областей. Для их указания воспользуемся тем, что, как нетрудно проверить, функцию независимости  $i_{B|A}$  можно представить в виде:

$$i_{B|A} = \frac{\beta(\alpha - 1)}{\alpha(\beta - 1)}. \quad (17)$$

В областях  $IC$ ,  $II C$  и  $IVQ$   $0 \leq i_{B|A} \leq 1$ , что согласно (17) приводит к системе двух неравенств относительно  $\alpha, \beta$ . Их решения в виде сечений  $i_{B|A} = \text{const}$  показаны на рис.3а. Разрешенные области примыкают к граничным плоскостям. В областях  $IQ$ ,  $IIQ$  и  $IIIQ$   $-1 \leq i_{B|A} \leq 0$ . Решения соответствующей



пары неравенств показаны на рис.3б. Разрешенные области отделены от части граничных плоскостей гиперболическими поверхностями.

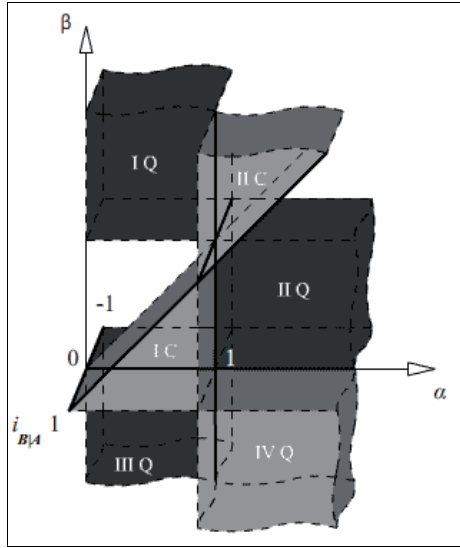


Рис. 2. Квантовая энтропийная диаграмма.

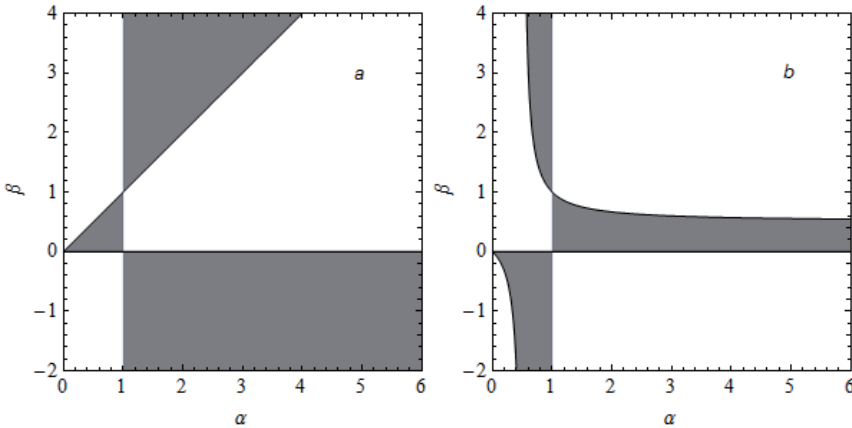


Рис. 3. Разрешенные области в сечениях  $i_{B/A} = \text{const}$  : (а) – области IC, II C и IVQ; (б) – области IQ, PQ и IIIQ.

На квантовом уровне величина  $\gamma$  недостаточна для различия причин и следствий. Но пользуясь соответствием  $c_2$  и  $\gamma$  в обеих классических областях и необходимым условием выполнения 7-й теоремы Шеннона во всех шести областях:  $c_2 > 0 \Rightarrow \alpha < 1$ ,  $c_2 < 0 \Rightarrow \alpha > 1$  можно дать определение причинности пригодное для квантовых переменных.

**Определение 2:** Причиной  $A$  и следствием  $B$  называются подсистемы, для которых  $c_2(A, B) > 0$ .

В силу параллелизма теорем классической и квантовой теории информации [40] выкладки (9) – (13) остаются справедливыми. Дополнительный физический смысл им придает обоснованная в работе [41] интерпретация запутанности квантовой системы как ресурса, служащего передаче информации через нее. Конкретно, в [41] показано, что отрицательная условная энтропия это «количество информации, которое может быть передано через <подсистемы> 1 и 2 от системы, взаимодействующей с 1 к другой системе, взаимодействующей с 2. Передаточная среда есть квантовая запутанность между 1 и 2». Причинность, характеризуемая величиной  $c_2$ , отражает асимметрию этого процесса (причинность тем более выражена, чем меньше  $|c_2|$ ).

В работе [1] Крамер впервые (хотя только на вербальном уровне) различил принципы сильной и слабой причинности. Наш подход позволяет провести это различие просто и формально. Сильная причинность соответствует обычному условию запаздывания  $\tau$  реакции следствия на причину. Тогда принцип сильной причинности, охватывающий локальные и нелокальные корреляции может быть сформулирован как следующая аксиома:

$$c_2(A, B) > 0 \Rightarrow \tau > 0, c_2(A, B) < 0 \Rightarrow \tau < 0, |c_2(A, B)| \rightarrow \infty \Rightarrow \tau \rightarrow 0, \quad (18)$$

где  $\tau$  – временной сдвиг редуцированного состояния  $B$  относительно  $A$ .

Заметим, что квантовые корреляции часто трактуются как мгновенные и не причинные. Наш подход включает такую трактовку, но только как частный случай. Действительно, в работах [42, 43] показано (и мы это увидим далее), что для любых информационно-симметричных запутанных состояний (и, следовательно, всех двухсоставных чистых состояний)  $|c_2| \rightarrow \infty$ . Только в случае смешанных состояний  $c_2$  может принимать конечные значения, то есть смешанность является необходимым условием квантовой причинности. Поэтому конечная причинность может быть только в системе, которая является или была открытой.

В случае необязательности выполнения аксиомы (18) мы имеем дело со слабой причинностью. Направление квантовой причинной связи определятся по-прежнему знаком  $c_2$ , но разрешено как запаздывание, так и опережение. Подчеркнем, что слабая причинность (нарушающая соответствие неравенств (18)) соответствует только нелокальным корреляциям. Она влечет возможность передачи информации в обратном времени, но только связанной с неизвестными состояниями или, в других терминах, со случайными процессами. Поэтому «телеграф в прошлое» невозможен, но возможно наблюдение истинно случайных (на которые нельзя повлиять) будущих состояний. Эта возможность была доказана в экспериментах по квантовой телепортации [4, 5], по обмену запутанностью [6] и по макроскопической запутанности [7-20].

Хотя определенный в (13) ход времени  $c_2$  с точностью до коэффициента  $k$  сам по себе представляет важнейший интерес (и в дальнейшем мы будем работать с ним), желательно показать путь его полного определения для естественных процессов. Для этого нельзя оставлять  $\delta t$  только длительностью «элементарного сигнала», что уместно только для технического канала. Поскольку  $\delta t$  в любом случае играет роль некоторого элементарного времени, естественно положить его, согласно [44], временем брахистостронной эволюции. В случае, не зависящего от времени гамильтониана, это время легко выражается в явном виде:

$$\delta t = \frac{\hbar \theta}{2\omega}, \quad (19)$$

где  $\omega$  – разность наибольшего и наименьшего собственных значений гамильтониана;  $\theta$  – длина геодезической (согласно метрике Фубини-Стади), соединяющей начальное и конечное состояния, если они ортогональны то  $\theta = \pi$ . В реалистичном гамильтониане  $\omega$  зависит от расстояния  $\Delta r$  и величина  $k$  становится полностью определенной. Так, легко показать [26], что при простом кулоновском взаимодействии  $k = e^2 / \hbar$ , что соответствует порядковой оценке  $c_2$ , полученной Козыревым [23] из полуклассических соображений.

В описываемой далее серии примеров, чтобы избежать усложнений, мы ограничимся расчетами  $c_2$  с точностью до  $k=1$ . Только в последнем примере главы III мы приведем более полную оценку с учетом  $\delta t$ , которая является переменной, зависимой от собственных значений гамильтониана (оставляя  $\Delta r = 1$ ).

На всем дальнейшем протяжении книги мы нигде не используем аксиому сильной причинности (18). Обратное направление времени разрешено наряду с прямым.

## Глава 2. Непричинные состояния

В этой главе мы рассматриваем симметричные состояния. Под симметричными двухсоставными состояниями мы понимаем состояния с равными энтропиями подсистем:  $S(A) = S(B)$ . В этом случае  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ ,  $|c_2| \rightarrow \infty$ . Причинность отсутствует (адиабатическая связь состояний). Однако величина  $i_{B|A} = i_{A|B}$  конечна и может быть сопоставлена с мерами смешанности, характеризуемыми  $\text{Tr} \rho_{AB}^2$  или  $S(AB)$  и со стандартной мерой запутанности – согласованностью  $C$  [45]:

$$C = \max(\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}, 0), \quad (20)$$

где  $\lambda_i$  – собственное значение матрицы  $\rho \tilde{\rho}$ . Матрица перевернутых спинов  $\tilde{\rho}$  определяется как:

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y). \quad (21)$$

Ниже мы показываем, что применение причинного анализа имеет смысл, естественно, только для смешанных состояний. Вначале мы рассматриваем элементарные системы, когда смешанность возникает в результате вычленения двух подсистем из трехсоставного чистого состояния, затем – более содержательные ситуации, когда смешанность является результатом взаимодействия с неконтролируемым окружением.

В этой и последующих главах для компактности записи мы принимаем обычное правило обозначения кубитов буквами  $A, B, C, \dots$  соответствующим порядковому положению в векторе или матричном элементе состояния.

### 2.1. Чистые состояния

Энтропийная симметрия следует просто из разложения Шмидта. Рассматриваем произвольные чистые запутанные состояния:

$$|\Phi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle, \quad (22)$$

или

$$|\Psi\rangle = \alpha|01\rangle + \beta|10\rangle, \quad (23)$$

где  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Поскольку состояние чистое  $\text{Tr} \rho_{AB}^2 = 1$ ,  $S(AB) = 0$ , согласованность  $C$  меняется в зависимости от соотношения  $\alpha$  и  $\beta$ . Но при любых отличных от нуля  $\alpha$  и  $\beta$  функция независимости постоянна:  $i_{B|A} = -1$ . Поэтому для чистых двухсоставных состояний причинный анализ не представляет интереса, поскольку он констатирует лишь их чистоту.

## 2.2. Состояние Гринберга-Хорна Цайлингера

Как известно, состояние Гринберга-Хорна-Цайлингера (ГХЦ)

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle) \quad (24)$$

характерно тем, что, несмотря на максимальную запутанность трех частиц ( $ABC$ ), парная запутанность (например,  $AB$ ) полностью отсутствует:  $C = 0$ .

Двухчастичное состояние является смешанным:  $\text{Tr}\rho_{AB}^2 = \frac{1}{2}$ ,  $S(AB) = 1$ . При этом  $i_{B|A} = 0$ . Запутанность отсутствует, но частицы  $A$  и  $B$  максимально классически коррелированы.

## 2.3. W-состояние

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) \quad (25)$$

подобно ГХЦ-состоянию, W-состояние является запутанным трехчастичным состоянием, но парная запутанность  $C = \frac{2}{3}$  (более того, (25), и вообще  $N$ -частичное W-состояние представляет случай попарной и равной запутанности всех  $N$  частиц [46]). Смешанность двухчастичной подсистемы несколько слабее, чем для ГХЦ:  $\text{Tr}\rho_{AB}^2 = \frac{5}{9}$ ,  $S(AB) = -\frac{1}{3}\log_2 \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\log_2 \frac{2}{3} \approx 0.918$ . Однако, также как в случае ГХЦ  $i_{B|A} = 0$ .

## 2.4. Диагональные состояния Белла

Исходные белловские диагональные состояния

$$\rho_{AB} = p_1 |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + p_2 |\Phi^-\rangle\langle\Phi^-| + p_3 |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + p_4 |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|, \quad (26)$$

где

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \quad |\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle \pm |01\rangle). \quad (27)$$

Редуцированные плотности равны, т.е. система симметрична:

$$\rho_A = \rho_B = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|). \quad (28)$$

Находя собственные значения, получаем:

$$S(AB) = -\sum_{i=1}^4 p_i \log_2 p_i, \quad (29)$$

$$S(A) = S(B) = 1. \quad (30)$$

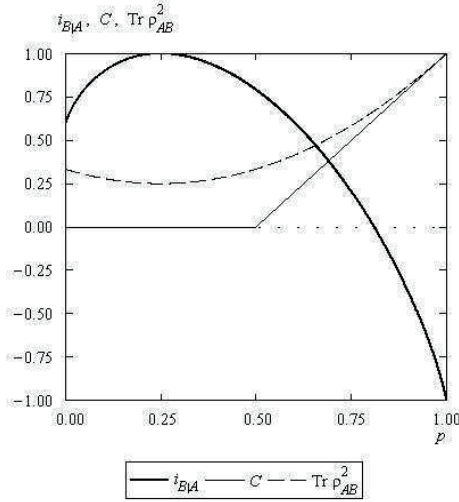
Функция независимости:

$$i_{B|A} = S(AB) - 1. \quad (31)$$

Согласованность:

$$C = \max(2\max\{p_i\} - 1, 0). \quad (32)$$

Поведение  $i_{B|A}$ ,  $C$  и  $\text{Tr} \rho_{AB}^2$  при выборе  $p_4 = p$ ,  $p_1 = p_2 = p_3 = (1 - p)/3$  показано на рис. 4. Видно, что  $i_{B|A}$ , отражает смешанность состояния, достигая 1 при равенстве всех  $p_i$ . Но более важно, что имеется интервал  $0.5 < p < 0.81$ , где  $i_{B|A} > 0$  и  $C > 0$ . На этом интервале система запутана, несмотря на положительность функций независимости, т.е. энтропийную классичность [37].



**Рис. 4.** Зависимость  $i_{B|A}$ ,  $C$  и  $\text{Tr} \rho_{AB}^2$  от  $p = p_4$  исходного белловского диагонального состояния (26).

Теперь рассмотрим диссипацию состояния (26) в присутствии общего термостата. Известно, что вопреки ранее принятым взглядам, диссипация может не сводиться к декогеренции, а, напротив, играть конструктивную роль в возникновении запутанности [47-54]. Следуя работе [52], положим, что кубиты представляют двухуровневые атомы, расположенные близко по сравнению с длиной волны. Диссипация происходит за счет спонтанной эмиссии фотонов, которые имеют существенную вероятность поглотиться соседним атомом. В [52] решается уравнение динамики матрицы плотности и подробно анализируются асимптотические решения  $t \rightarrow \infty$  для различных исходных состояний. В частности, асимптотическая матрица плотности при исходной (26) имеет вид:

$$\rho_{AB}^{as} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p_4}{2} & -\frac{p_4}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{p_4}{2} & \frac{p_4}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p_4 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Отсюда:

$$S(AB) = -p_4 \log_2 p_4 - (1-p_4) \log_2 (1-p_4), \quad (34)$$

$$S(A) = S(B) = -\frac{p_4}{2} \log_2 \frac{p_4}{2} - (1-\frac{p_4}{2}) \log_2 (1-\frac{p_4}{2}), \quad (35)$$

$$i_{B|A} = \frac{S(AB)}{S(A)} - 1, \quad (36)$$

$$C = p_4. \quad (37)$$

Конструктивная роль диссипации заключается в том, что даже когда исходное состояние сепарабельно ( $C = 0$ ), асимптотическое запутано во всем диапазоне конечных  $p_4$ . Рис. 5 демонстрирует, что функция независимости в этом случае не отражает степень смешанности как в предыдущих случаях, а является нелинейным отображением согласованности. При этом  $i_{B|A} \leq 1$ , т.е. система коррелирована при любых  $p_4$  ( $\max i_{B|A} = 1$ ) достигается при  $p_4 = 0$ ). На интервале  $0 \leq p_4 < 0.67$   $i_{B|A} > 0$ . В этом интервале система в энтропийном смысле представляется классической, при довольно сильной запутанности.

## 2.5. Состояния Вернера

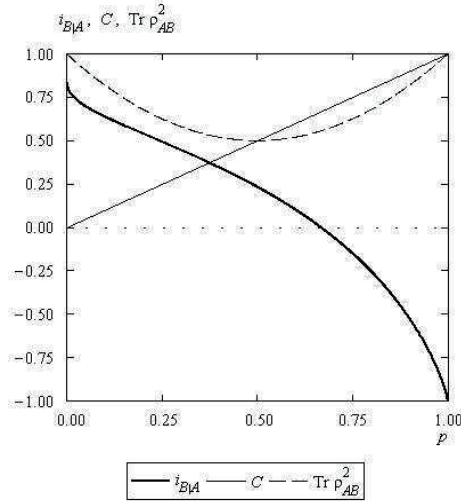
Исходные состояния Вернера:

$$\rho_{AB} = p \frac{I}{4} + (p-1) |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|. \quad (38)$$

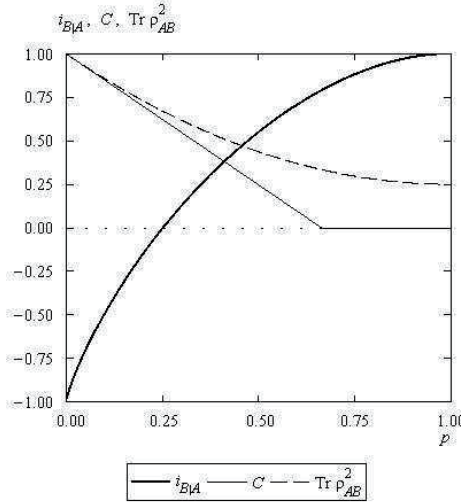
Для них, так же как для диагональных состояний Белла, справедливы выражения (28), (30) и (31), но энтропия системы и согласованность другие:

$$S(AB) = -\frac{3p}{4} \log_2 \frac{p}{4} - \left(1 - \frac{3p}{4}\right) \log_2 \left(1 - \frac{3p}{4}\right), \quad (39)$$

$$C = \max\left(1 - \frac{3p}{2}, 0\right). \quad (40)$$



**Рис. 5.** Зависимость  $i_{B|A}$ ,  $C$  и  $\text{Tr} \rho_{AB}^2$  от  $p = p_4$  асимптотического белловского диагонального состояния (33).



**Рис. 6.** Зависимость  $i_{B|A}$ ,  $C$  и  $\text{Tr} \rho_{AB}^2$  от степени деполаризации  $p$  исходного состояния Вернера (38).

На рис. 6 показана зависимость  $i_{B|A}$ ,  $C$ ,  $\text{Tr} \rho_{AB}^2$  от  $p$ . Видно, что в зависимости от степени декогеренции  $i_{B|A}$  меняется в полном диапазоне от  $-1$  при  $p = 0$  до  $+1$  при  $p = 1$  (полной деполаризации), когда корреляция подсистем



полностью исчезает. Независимость увеличивается согласно увеличению смешанности в обеих мерах (для  $S(AB)$  – точно пропорционально) и уменьшению согласованности. Наиболее интересно, что имеется интервал  $\frac{1}{4} < p < \frac{2}{3}$ , где  $i_{B|A} > 0$  и  $C > 0$ . Система в классична, но, тем не менее, является запутанной.

Рассмотрим результат процесса диссипации состояния (38). Согласно [52] в асимптотическом пределе  $t \rightarrow \infty$ :

$$\rho_{AB}^{as} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p}{8} & -\frac{p}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{p}{8} & -\frac{p}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{p}{4} \end{pmatrix}. \quad (41)$$

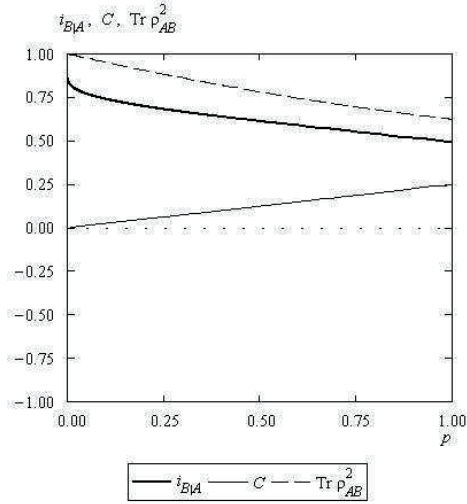
Отсюда:

$$S(AB) = -\frac{p}{4} \log_2 \frac{p}{4} - \left(1 - \frac{p}{4}\right) \log_2 \left(1 - \frac{p}{4}\right), \quad (42)$$

$$S(A) = S(B) = -\frac{p}{8} \log_2 \frac{p}{8} - \left(1 - \frac{p}{8}\right) \log_2 \left(1 - \frac{p}{8}\right), \quad (43)$$

$$C = \frac{p}{4}. \quad (44)$$

Рис. 7 показывает, что асимптотическое диссипированное состояние Вернера радикально отличается от исходного: оно не только запутано при любом  $p > 0$ , но согласованность растет с ростом  $p$  – чем менее запутано исходное состояние (включая его полную сепарабельность), тем более запутано диссипированное. При этом  $i_{B|A}$  положительна (классична) при любом  $p$  ( $\max i_{B|A} \approx 0.819$  при  $p = 0$ ,  $\min i_{B|A} \approx 0.493$  при  $p = 1$ ), уменьшение  $i_{B|A}$  при росте  $p$  почти линейно отображает увеличение запутанности. Замечательно, что это уменьшение  $i_{B|A}$  и рост  $C$  происходит практически пропорционально увеличению смешанности.



**Рис. 7.** Зависимость  $i_{B|A}$ ,  $C$  и  $\text{Tr} \rho_{AB}^2$  от степени деполяризации  $p$  асимптотического состояния Вернера (41).

### 2.6. Максимально запутанные смешанные состояния

В работе [55] обосновано предположение, что при фиксированном  $\text{Tr} \rho_{AB}^2$  максимально запутанным является состояние:

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} h(\delta) & 0 & 0 & \frac{\delta}{2} \\ 0 & 1-2h(\delta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\delta}{2} & 0 & 0 & h(\delta) \end{pmatrix}, \quad h(\delta) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \delta \in \left[0, \frac{2}{3}\right] \\ \frac{\delta}{2}, & \delta \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}. \quad (45)$$

Отсюда:

$$S(AB) = -(1-2h) \log_2(1-2h) - \left(h - \frac{\delta}{2}\right) \log_2\left(h - \frac{\delta}{2}\right) - \left(h + \frac{\delta}{2}\right) \log_2\left(h + \frac{\delta}{2}\right), \quad (46)$$

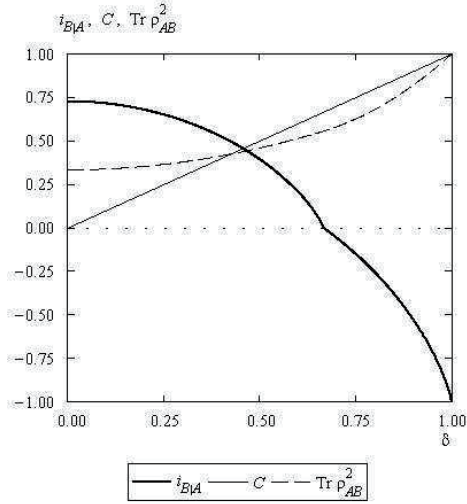
$$S(A) = S(B) = -h \log_2 h - (1-h) \log_2(1-h), \quad (47)$$

$i_{B|A}$  определяется (44), согласованность:

$$C = \delta. \quad (48)$$

На рис. 8 показана зависимость  $i_{B|A}$ ,  $C$  и  $\text{Tr} \rho_{AB}^2$  от  $\delta$ .  $i_{B|A}$  меняется от +0.725 при  $\delta=0$  до -1, при  $\delta=1$  и ее уменьшение, в целом, отражает

уменьшение смешанности. При этом в интервале  $0 < \delta < \frac{2}{3}$   $i_{BA} > 0$  при  $C > 0$  – состояние запутано, несмотря на энтропийную классичность.



**Рис. 8.** Зависимость  $i_{B|A}$ ,  $C$  и  $\text{Tr} \rho_{AB}^2$  от  $\delta$  исходного максимально запутанного смешанного состояния (45).

Согласно решению [34] асимптотический результат диссипации (45):

$$\rho_{AB}^{as} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(1-2h) & -\frac{1}{4}(1-2h) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}(1-2h) & \frac{1}{4}(1-2h) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}+h \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Отсюда:

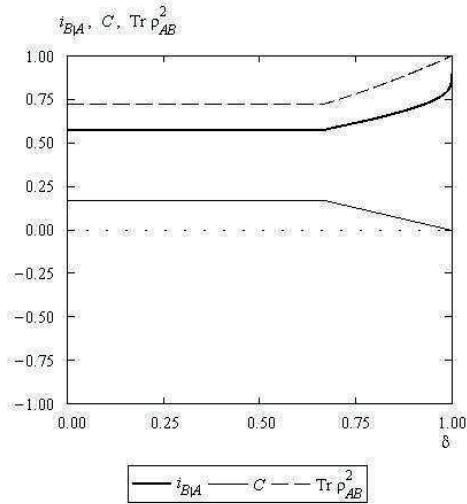
$$S(AB) = -\left(\frac{1}{2}+h\right) \log_2\left(\frac{1}{2}+h\right) - \left(\frac{1}{2}-h\right) \log_2\left(\frac{1}{2}-h\right), \quad (50)$$

$$S(A) = S(B) = -\left(\frac{1}{4}-\frac{h}{2}\right) \log_2\left(\frac{1}{4}-\frac{h}{2}\right) - \left(\frac{3}{4}+\frac{h}{2}\right) \log_2\left(\frac{3}{4}+\frac{h}{2}\right), \quad (51)$$

$i_{B|A}$  определяется (36), согласованность:

$$C = \frac{1}{2}(1-2h). \quad (52)$$

Рис. 9 показывает, что диссипированное максимальное запутанное смешанное состояние характеризуется совершенно иной зависимостью  $C$  от  $\delta$ , поэтому при любых  $\delta$  оно более запутано, чем исходное. В энтропийном же смысле в результате диссипации система стала классической ( $0.571 \leq i_{B|A} \leq 1$  при всех  $\delta$ ). В противоположность исходному состоянию функция независимости меняется обратно степени смешанности. В пределе чистого состояния  $\delta \rightarrow 0$ :  $S(AB) \rightarrow 0$ ,  $\text{Tr} \rho_{AB}^2 \rightarrow 1$ , но также  $S(A) = S(B) \rightarrow 0$ , поэтому  $i_{B|A} = i_{A|B} \rightarrow 1$ .



**Рис. 9.** Зависимость  $i_{B|A}$ ,  $C$  и  $\text{Tr} \rho_{AB}^2$  от  $\delta$  асимптотического максимально запутанного смешанного состояния (49).

По соотношению независимости, согласованности и смешанности асимптотическое максимально запутанное состояние качественно близко к асимптотическому состоянию Вернера.

## Глава 3

### Причинные состояния

В этой главе мы рассматриваем примеры асимметричных состояний, для которых применение причинного анализа действительно содержательно. Примеры рассматриваются в порядке нарастания нетривиальности результата. В расчетах  $c_2$  будем полагать  $k=1$  до последнего примера, где разберем влияние переменного  $k$ .

#### 3.1. Состояние Коффмана-Кунду-Вуттерса

Коффман, Кунду и Вутерс [56] исследовали следующее состояние (СКW-состояние):

$$|CKW\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|100\rangle + \frac{1}{2}(|001\rangle + |010\rangle), \quad (53)$$

примечательное наличием максимальной парной запутанности (измеряемой согласованностью) в подсистемах  $AB$  и  $AC$ . Свойства запутанности этого состояния также были исследованы в работе [46].

Рассмотрим пару  $AB$  (пара  $AC$  идентична). Редуцированные плотности:

$$\rho_{AB} = \frac{1}{4}|00\rangle\langle 00| + \frac{1}{2}|10\rangle\langle 10| + \frac{1}{2\sqrt{2}}|10\rangle\langle 01| + \frac{1}{2\sqrt{2}}|01\rangle\langle 10| + \frac{1}{4}|01\rangle\langle 01|, \quad (54)$$

$$\rho_A = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|), \quad (55)$$

$$\rho_B = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1|. \quad (56)$$

Энтропии:

$$S(AB) = S(B) = -\frac{3}{4}\log_2 \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\log_2 \frac{1}{4} \approx 0.811, \quad (57)$$

$$S(A) = 1. \quad (58)$$

Функции независимости:

$$i_{B|A} \approx -0.233, \quad i_{A|B} = 0. \quad (59)$$

Меры причинности:

$$\gamma = -\infty, \quad c_2 \approx 5.299. \quad (60)$$

Согласованность:

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (61)$$

Согласно квантовой мере  $c_2$ ,  $A$  – причина,  $B$  – следствие, классическая мера  $\gamma$  не имеет смысла (область ПИ на энтропийной диаграмме). В паре  $AC$  результат тот же и, таким образом,  $A$  является общей причиной для  $B$  и  $C$ . Классическая интуиция в этом случае была бы бессильна отличить общую причину от общего следствия.

Интуиция дает лишь справедливый, в силу симметрии, ответ об отсутствии причинной связи  $B$  и  $C$ . Подобные выкладки для этой пары дают:

$i_{BC} = i_{CB} \approx 0.233$ ,  $\gamma = 1$ ,  $|c_2| = \infty$ ,  $C = \frac{1}{2}$ . Частицы  $B$  и  $C$  запутаны, и классически коррелированы благодаря наличию общей причины. Заметим, что смешанность, согласно обеим мерам, в парах  $AB$  ( $AC$ ) меньше, чем в паре  $BC$ :  $S(AB) \approx 0.811$ ,  $\text{Tr}\rho_{AB}^2 \approx 0.625$ ;  $S(BC) = 1$ ,  $\text{Tr}\rho_{AB}^2 = \frac{1}{2}$ .

### 3.2. WRr-состояние

В работах [57, 58] исследованы различные трехсоставные состояния, связанные преобразованиями симметрии, частными случаями которых являются ГХЦ и W-состояния. В частности, получен дуплет:

$$|WRr\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|001\rangle + |010\rangle - 2|100\rangle). \quad (62)$$

По распределению запутанности это состояние отличается от рассмотренного в главе II симметричного W-состояния, для которого  $C_{AB} = C_{AC} = C_{BC} = \frac{1}{3}$ , и рассмотренного выше асимметричного СКW-состояния,

для которого  $C_{AB} = C_{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $C_{BC} = \frac{1}{2}$ . Для состояния (62)  $C_{AB} = C_{AC} = \frac{2}{3}$ ,  $C_{BC} = \frac{1}{3}$  [57, 58], то есть у пары  $BC$  запутанность вдвое слабее, чем у двух других пар.

Для (62):

$$\rho_{AB} = \frac{1}{6}(4|10\rangle\langle 10| - 2|10\rangle\langle 01| - 2|01\rangle\langle 10| + |01\rangle\langle 01| + |00\rangle\langle 00|), \quad (63)$$

$$S(AB) = S(B) = -\frac{1}{6}\log_2 \frac{1}{6} - \frac{5}{6}\log_2 \frac{5}{6} \approx 0.651, \quad (64)$$

$$S(A) = -\frac{1}{3}\log_2 \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\log_2 \frac{2}{3} \approx 0.918, \quad (65)$$

$$i_{B|A} \approx -0.412, \quad i_{A|B} = 0, \quad (66)$$

$$\gamma = -\infty, \quad c_2 \approx 3.43. \quad (67)$$

То же верно для пары  $AC$ . При этом  $\text{Tr}\rho_{AB}^2 = \text{Tr}\rho_{AC}^2 \approx 0.722$ .

Так же как в СКВ-состоянии (53),  $A$  является причиной для  $B$  и  $C$  и только квантовая мера причинности имеет смысл (область ППQ на рис.2). Количественная разница заключается в том, что согласно обоим мерам смешанности в причинных звеньях (62) она меньше, чем в (53), и хотя согласованность меньше, функция независимости  $i_{B|A} = i_{C|A} < 0$  ниже, т.е. квантовые корреляции сильнее и  $c_2$  – ниже, т.е. причинная связь сильнее выражена.

Для частиц  $B$  и  $C$  в состоянии (62) имеем:  $S(BC) \approx 0.918$ ,  $\text{Tr}\rho_{BC}^2 \approx 0.556$ ,  $i_{B|C} = i_{C|B} \approx 0,412$ ,  $\gamma = 1$ ,  $|c_2| = \infty$ ,  $C = \frac{1}{3}$ . Как и в случае (53) причинность в паре  $BC$  отсутствует, и хотя смешанность ниже, но запутанность и классическая ( $i_{B|C} = i_{C|B} > 0$ ) коррелированность слабее.

### 3.3. Квантово-классические состояния

Вопрос об особенностях поведения асимметричных систем был впервые поставлен как проблема квантовой информации в работе [37], где рассмотрен случай «квантово-классических» двухсоставных состояний. Квантовой именуется подсистема  $A$ , для которой  $S(A) > S(AB)$ , классической –  $B$  для которой  $S(B) \leq S(AB)$ . Был сформулирован ряд открытых вопросов о нетривиальном поведении открытых систем, в том числе, об асимметрии передачи информации в направлениях  $A \rightarrow B$  и  $B \rightarrow A$ .

В [37] рассмотрено асимметричное состояние

$$\rho_{AB} = q|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + (1-q)|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|, \quad 0 < q < 1 \quad (68)$$

с нормализованными  $|\Psi_1\rangle = a|00\rangle + \sqrt{1-a^2}|11\rangle$  и  $|\Psi_2\rangle = a|10\rangle + \sqrt{1-a^2}|01\rangle$  с  $0 < a < 1$ . Из (68) видно, что смешанность зависит только от  $q$ , запутанность – от  $q$  и  $a$ . (68) в развернутом виде выглядит:

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} qa^2 & 0 & 0 & qa\sqrt{1-a^2} \\ 0 & (1-q)(1-a^2) & (1-q)a\sqrt{1-a^2} & 0 \\ 0 & (1-q)a\sqrt{1-a^2} & (1-q)a^2 & 0 \\ qa\sqrt{1-a^2} & 0 & 0 & q(1-a^2) \end{pmatrix} \quad (68a)$$

Отсюда:

$$S(AB) = -q \log_2 q - (1-q) \log_2 (1-q), \quad (69)$$

$$S(A) = -(a^2 - 2qa^2 + q) \log_2 (a^2 - 2qa^2 + q) - (1-a^2 + 2qa^2 - q) \log_2 (1-a^2 + 2qa^2 - q), \quad (70)$$

$$S(B) = -a^2 \log_2 a^2 - (1-a^2) \log_2 (1-a^2), \quad (71)$$

$$i_{B|A} = \frac{S(AB) - S(A)}{S(B)}, \quad i_{A|B} = \frac{S(AB) - S(B)}{S(A)}, \quad (72)$$

$$C = 2\sqrt{a^2(1-a^2)}|1-2q|. \quad (73)$$

Всегда  $S(A) \geq S(AB)$ ;  $S(B)$  может быть как больше, так и меньше  $S(AB)$ . Согласно определению [37] подсистема  $A$  почти всегда квантовая, подсистема  $B$  может быть и квантовой и классической. На рис 10 показаны зависимости  $i_{B|A}$ ,  $C$  и  $\text{Tr} \rho_{AB}^2$  от  $q$  и  $a^2$ , которые имеют ожидаемый вид. Нетривиальной является лишь зависимость  $i_{B|A}$  от  $a^2$ . Тот факт, что  $i_{B|A}$  почти всегда отрицательна (кроме случая  $q = \frac{1}{2}$ ) как раз отражает то, что подразумевается под тем, что подсистема  $A$  почти всегда квантовая. При максимальной смешанности, достигаемой при  $q = \frac{1}{2}$  подсистема не запутана ( $C = 0$ ), но классически максимально коррелирована ( $i_{B|A} = 0$ ) при любом  $a^2$ .

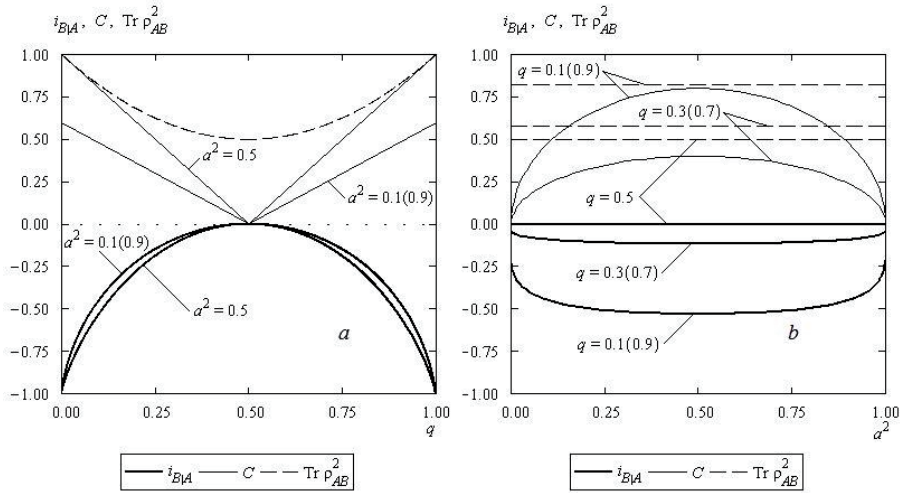


Рис. 10. Зависимость  $i_{B|A}$ ,  $C$  и  $\text{Tr} \rho_{AB}^2$  от  $q$  и  $a^2$  "квантово-классического" состояния (68).



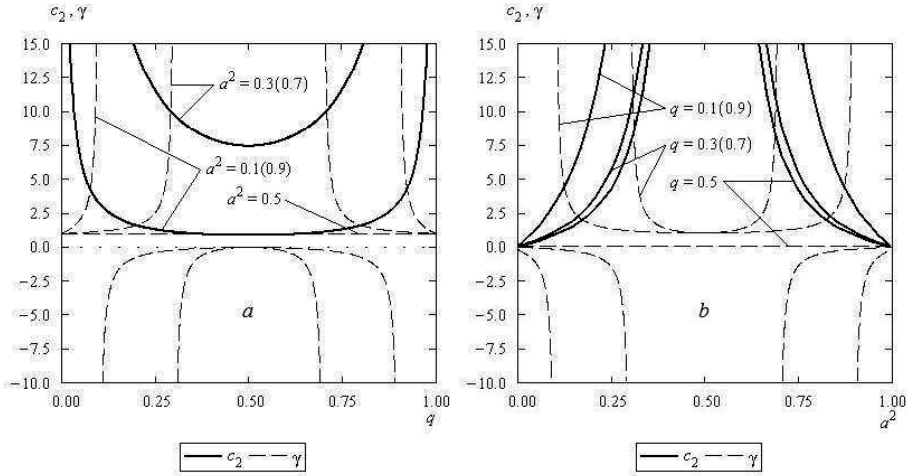


Рис. 11. Зависимость  $c_2$  и  $\gamma$  от  $q$  и  $a^2$  "квантово-классического" состояния (68).

На рис. 11 показаны зависимости  $c_2$  и  $\gamma$  от  $q$  и  $a^2$ . Положительная величина  $c_2$  показывает, что при почти всех  $q$  и  $a^2$   $A$  – причина,  $B$  – следствие. Причинность исчезает ( $c_2 = \infty$ ) только при  $q=0$  или  $1$  (чистое состояние) и  $a^2 = \frac{1}{2}$  (симметричное состояние).

Состояния соответствуют областям IQ и IIIQ (рис.2), соответственно классическая мера причинности  $\gamma$  на рис. 11 показывает либо ошибочно обратное направление причинной связи, либо теряет смысл при отрицательных  $\gamma$ . Классическая причинность отсутствует ( $\gamma=1$ ) при  $a^2 = q$  и  $a^2 = 1-q$ . Отрицательные значения  $\gamma$  (область IIIQ) соответствуют положительным значениям функции независимости  $i_{A|B}$  или классичности подсистемы  $B$  в формулировке авторов работы [37].

Нетривиальным количественным выводом (который нельзя сделать просто из вида состояния (68) или (68a)) является то, что максимально смешанное состояние  $q = \frac{1}{2}$  соответствует линии однозначных функций (рис.1).

При любых  $a^2$  здесь  $\gamma = 0$  (рис.11), что соответствует предельно необратимому переходу  $A \Rightarrow B$ . Эта однозначная зависимость  $B$  и  $A$  достигается при нулевой согласованности (рис.10). При этом в зависимости от  $a^2$   $c_2$  может иметь любое положительное значение (рис.11). Иначе говоря, случаю предельно сильной классической причинности может соответствовать различная степень одинаково направленной квантовой причинности – от наиболее сильной для

предельной асимметрии состояния ( $a^2 \rightarrow 0$  или  $a^2 \rightarrow 1$ ) до ее отсутствия при симметрии ( $a^2 = \frac{1}{2}$ ).

### 3.4. Термально-запутанные состояния в неоднородном магнитном поле

Обычно считается, что рост, как температуры, так и магнитного поля разрушает запутанность. Однако в работе [59] было показано, что неоднородное магнитное поле, напротив, играет конструктивную роль и запутанность поддерживается как при высокой температуре, так и в сильном поле. Обнаружилось, что наибольший эффект в подавлении декогеренции оказывает именно асимметрично приложенное поле, (противоположно направленное в подсистемах  $A$  и  $B$ ). Поэтому применение причинного анализа к термально-запутанным состояниям в неоднородном магнитном поле представляет интерес.

Будем, согласно [59] рассматривать термическое запутывание двух кубитов – частиц со спином  $\frac{1}{2}$  связанных  $XU$  гейзенберговским взаимодействием. Модельный гамильтониан:

$$H = J(S_A^x S_B^x + S_A^y S_B^y) + B_A S_A^z + B_B S_B^z, \quad (74)$$

где спиновые операторы  $S^j = \sigma^j / 2$  ( $j = x, y, z$ ),  $J$  – константа гейзенберговского взаимодействия,  $B_A$  и  $B_B$  – внешнее магнитное поле, приложенное к частицам  $A$  и  $B$ . Собственные значения и собственные векторы гамильтониана (74).

$$\begin{aligned} H |00\rangle &= -(B_A + B_B) |00\rangle, \\ H |11\rangle &= (B_A + B_B) |11\rangle, \\ H |\Psi^\pm\rangle &= \pm \sqrt{D} |\Psi^\pm\rangle, \end{aligned} \quad (75)$$

$$\text{Где } |\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{N_\pm} \left[ |01\rangle + \frac{(B_A - B_B) \pm \sqrt{D}}{J} |10\rangle \right], \quad D = (B_A - B_B)^2 + J^2.$$

Матрица плотности термального состояния:

$$\rho_{AB} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} e^{(B_A + B_B)/k_B T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m + n & -s & 0 \\ 0 & -s & m - n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-(B_A + B_B)/k_B T} \end{pmatrix}, \quad (76)$$

$$\text{где } Z = \text{Tr} e^{-H/k_B T}, \quad m = \text{ch}\left(\frac{\sqrt{D}}{k_B T}\right), \quad n = \frac{B_A - B_B}{\sqrt{D}} \text{sh}\left(\frac{\sqrt{D}}{k_B T}\right), \quad s = \frac{J \text{sh}\left(\frac{\sqrt{D}}{k_B T}\right)}{\sqrt{D}}.$$

В дальнейших расчетах принимается  $k_B = J = 1$ . Асимметрию состояний определяет величина  $n$ .

Из (76) следует:

$$S(AB) = -\frac{m + \sqrt{n^2 + s^2}}{Z} \log_2 \frac{m + \sqrt{n^2 + s^2}}{Z} - \frac{m - \sqrt{m^2 + s^2}}{Z} \log_2 \frac{m - \sqrt{m^2 + s^2}}{Z} - \frac{\exp(\frac{B_A + B_B}{T})}{Z} \log_2 \frac{\exp(\frac{B_A + B_B}{T})}{Z} - \frac{\exp(-\frac{B_A + B_B}{T})}{Z} \log_2 \frac{\exp(-\frac{B_A + B_B}{T})}{Z}, \quad (77)$$

$$S(A) = -\frac{\exp(\frac{B_A + B_B}{T}) + m + n}{Z} \log_2 \frac{\exp(\frac{B_A + B_B}{T}) + m + n}{Z} - \frac{\exp(-\frac{B_A + B_B}{T}) + m - n}{Z} \log_2 \frac{\exp(-\frac{B_A + B_B}{T}) + m - n}{Z}, \quad (78)$$

$$S(B) = -\frac{\exp(\frac{B_A + B_B}{T}) + m - n}{Z} \log_2 \frac{\exp(\frac{B_A + B_B}{T}) + m + n}{Z} - \frac{\exp(-\frac{B_A + B_B}{T}) + m + n}{Z} \log_2 \frac{\exp(-\frac{B_A + B_B}{T}) + m + n}{Z}. \quad (79)$$

Функции независимости определяются общими формулами (72), согласованность:

$$C = 2 \frac{s-1}{Z}. \quad (80)$$

Для исследования эффекта неоднородного поля примем сначала  $T = 1$ ,  $B_A = 5$ ,  $B_B = 5p$ .

Максимальная смешанность состояния, как по критерию  $\max S(AB)$ , определяемому из (77), так и по критерию  $\min \text{Tr} \rho_{AB}^2$  (рис. 12) достигается при  $p \approx 0.010$ . Согласованность на рис. 12 демонстрирует отмеченную в [59] наибольшую запутанность при противоположно направленных полях в  $A$  и  $B$ , но максимум достигается не при точной антисимметрии ( $p = -1$ ), как предположено в [59], а при  $p \approx -0.253$ . Отметим, что согласно (78) и (79)  $\max S(A)$  ( $p \approx -0.149$ ) близок по положению к  $\max C$ , а  $\max S(B)$  – к  $\min \text{Tr} \rho_{AB}^2$  ( $p \approx 0.08$ ), при этом  $\max \alpha \approx 26.5$  наблюдается при  $p \approx 0.176$ . Функция независимости  $i_{B|A}$  на рис. 12 не демонстрирует подобия со смешанностью, ни с согласованностью.  $i_{B|A} \rightarrow -1$ , т.е. квантовые корреляции растут при глубоко отрицательных  $p$ , несмотря на уменьшение  $C$ . В интервале  $-0.54 < p < 0.50$   $i_{B|A}$  классически положительна, несмотря на  $C > 0$ .  $\max i_{B|A}$ , т.е. наименьшая полная корреляция подсистем наблюдается при  $p \approx 0.379$ , когда  $C$

еще конечна. При больших  $p$   $i_{B|A}$  снижается за счет классической корреляции в параллельных полях, причем это снижение становится резче при  $p > 1$ . На рис. 12 показана также функция независимости  $i_{A|B}$ . Хотя  $i_{A|B} = 0$  при  $p = 0$  полной антисимметрии по  $p$  нет,  $\min i_{A|B}$  наблюдается при  $p \approx -1.115$ ;  $i_{A|B} \rightarrow 1$  при больших положительных  $p$ . Можно констатировать, что на интервале  $0 < p < 0.5$  система запутана, несмотря на классичность обеих  $i$ . Таким образом, функции независимости демонстрируют нетривиальное соотношение квантовых и классических корреляций подсистем, которые нельзя обнаружить из рассмотрения согласованности.

Рассмотрим причинную связь подсистем, при этом определим  $c_2$  не только при  $k = \Delta r / \delta t = 1$  в (13), но, воспользовавшись собственными значениями гамильтониана (75), рассчитаем  $\delta t$  согласно (19). Положив  $\Delta r = 1$ , определим:  $c'_2 = c_2 / \delta t$ . На рис.13 показаны  $c_2$ ,  $c'_2$  и  $\gamma$ , первые две для удобства показаны в двух масштабах для разных  $p$ . Согласно всем трем мерам причинность отсутствует при  $p = \pm 1$ , т.е. в равных параллельных и антипараллельных полях в  $A$  и  $B$ . Интервал  $p \in (-\infty, -1)$  соответствует области IQ;  $p \in (-1, -0.54]$  – IIQ;  $p \in [-0.54, 0]$  – IVQ;  $p \in (0, 1)$  – ISC;  $p \in (1, \infty)$  – IC. Согласно обеим квантовым мерам при  $|p| > 1$   $A$  – причина,  $B$  – следствие, при  $|p| < 1$  – наоборот. Иначе говоря, следствие всегда находится в области более сильного поля. Это может быть понято как эффект стабилизирующей поляризации кубита в сильном поле, в результате которого кубит становится в большей степени стоком информации, чем источником. При направленности причинной связи  $A \rightarrow B$  при  $|p| \rightarrow \infty$  причинность усиливается:  $c_2 \rightarrow +0$ ,  $c'_2 \rightarrow +0$ . Но при направленности  $B \rightarrow A$   $\min |c_2|$  и  $|\min |c'_2||$  наблюдаются не при  $p = 0$ , как можно было бы интуитивно полагать, а при конечном  $p \approx 0.364$  для  $c_2$  и  $p \approx 0.266$  для  $c'_2$ . Эти значения  $p$  определяются избранной температурой  $T = 1$ . Расчет показывает, что конкретное отношение полей  $p$ , при котором причинная связь наиболее сильно уменьшается с повышением температуры. Функция причинности  $\gamma$  дает правильный ответ о направленности причинной связи только при  $p > 0$ ; при  $p \leq -0.54$  она дает неверную направленность, а при  $-0.54 \leq p < 0$  – не имеет классического смысла. Из рис.13 видно, что разница между поведением  $c_2$  и  $c'_2$  непринципиальна.

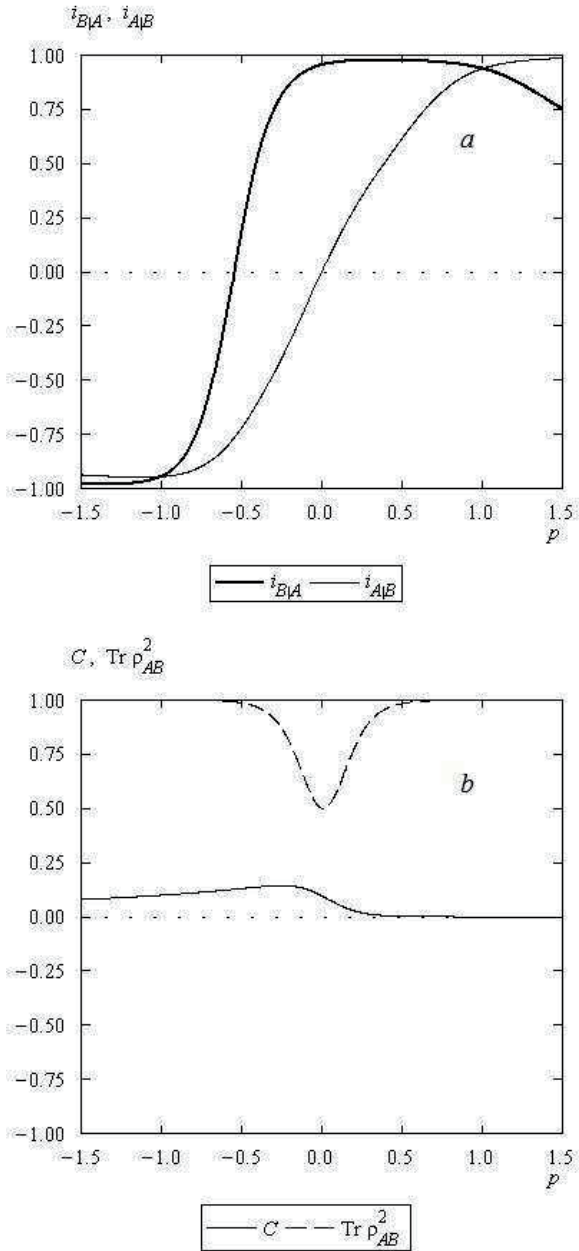


Рис. 12. Зависимость  $i_{B|A}$ ,  $i_{A|B}$ ,  $C$  и  $\text{Tr} \rho_{AB}^2$  от  $p = B_B/B_A$  состояния (76) ( $T=1$ ).

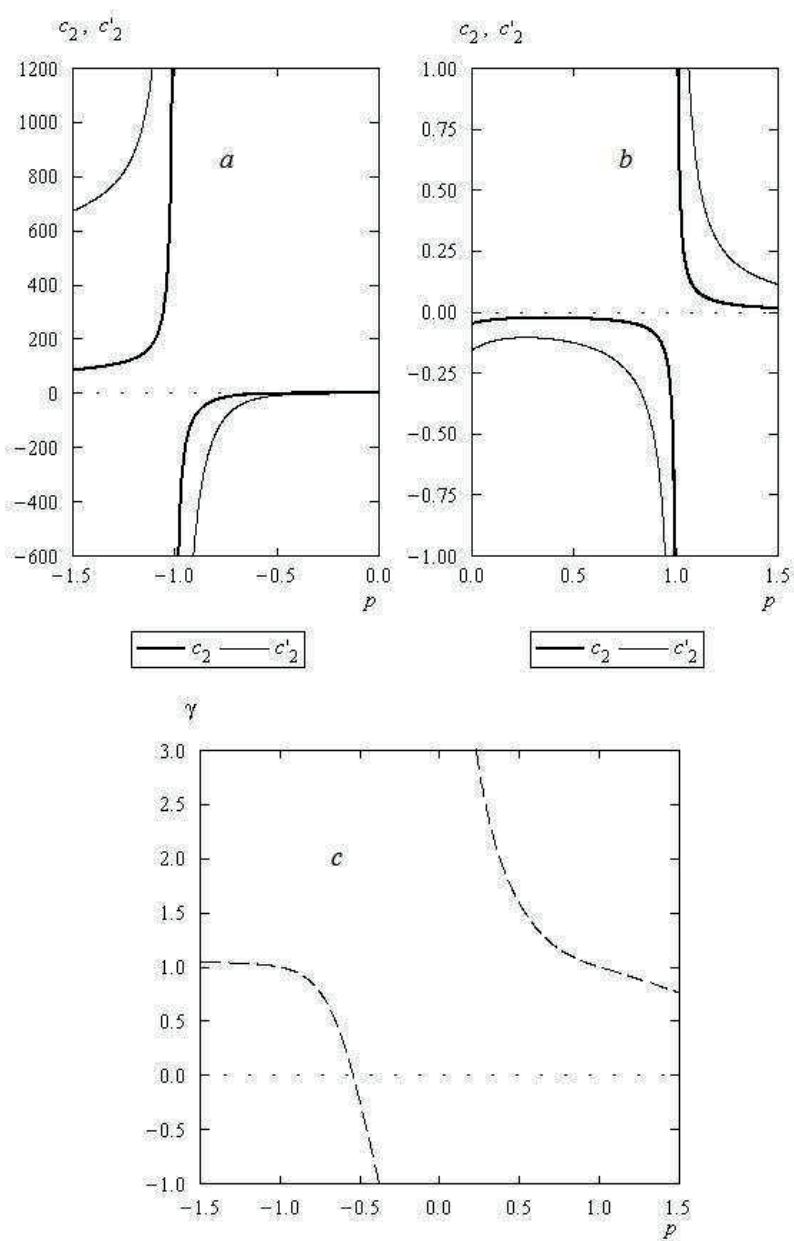


Рис. 13. Зависимость  $c_2$ ,  $c'_2$  и  $\gamma$  от  $p = B_B/B_A$  состояния (76) ( $T=1$ ).

Рассмотрим подробнее влияние температуры. Можно ожидать, что любые корреляции подсистем уменьшаются с ростом температуры. С другой стороны, именно конечная температура приводит к смешанности состояния, которая является необходимым условием причинной связи. Действительно, с ростом температуры  $S(AB)$  возрастает, но возрастают и энтропии подсистем, причем по-инному и можно ожидать нетривиальное поведение энтропийных функций.

Из рис.14 видно, что смешанность ожидаемо увеличивается с температурой, но магнитное поле в подсистеме  $B$  практически независимо от направления, уменьшает влияние температуры. В полном соответствии с основным выводом работы [59] согласованность, показанная на рис.15 при противоположно направленных полях в  $A$  и  $B$  остается конечной при высокой температуре. Однако наибольший эффект подавления декогеренции достигается не в антисимметричном случае ( $p=-1$ ), а при более сильном отрицательном поле в  $B$  ( $p=-1.5$ ). При  $T \rightarrow 0$ , напротив, наивысшая согласованность достигается при нулевом поле в  $B$ . При положительных  $p$  согласованность быстро исчезает в соответствии с обычным представлением о подавлении запутанности магнитным полем. Функция независимости  $i_{B|A}$  (рис.16) показывает на монотонное увеличение квантовых и классических корреляций подсистем при условии отрицательного поля в  $B$  от  $p=0$  до  $p=-1.5$ . При положительном  $p$  корреляции только классические и зависимость от температуры немонотонна – имеется минимум положительной  $i_{B|A}$  (максимум классической корреляции) при конечной температуре. При  $p > 1$  всякая коррелированность подсистем практически исчезает. Обратная функция независимости  $i_{A|B}$  (рис. 17) отличается от прямой значительно меньшей чувствительностью температурного хода к величине  $p$ , когда последняя отрицательна. При положительных  $p$  качественной разницы в температурных кривых  $i_{A|B}$  и  $i_{B|A}$  не наблюдается. Но при  $p=0$  качественная разница велика – кривая  $i_{A|B}(T)$  имеет точку перегиба (при  $T \approx 0.8$ ), полностью отсутствующую в  $i_{B|A}$ ; количественная разница также очень заметна.

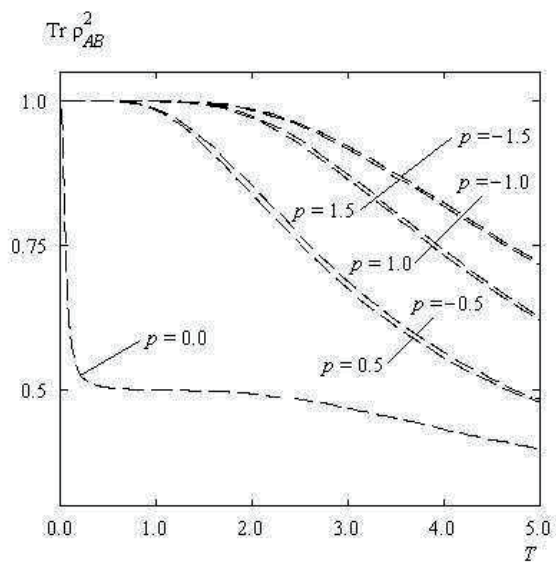


Рис. 14. Зависимость  $\text{Tr } \rho_{AB}^2$  от  $T$  состояния (76).

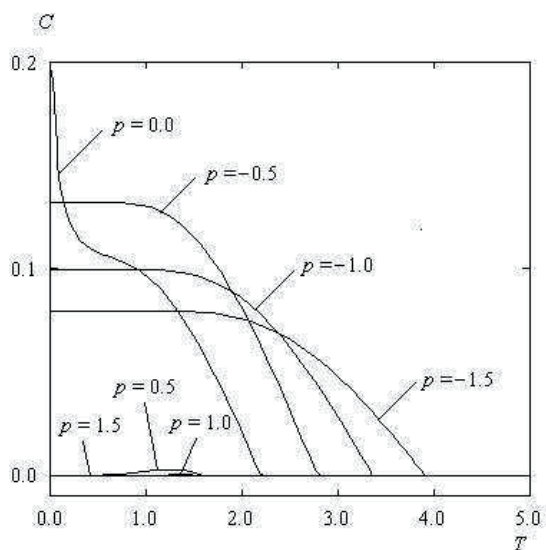


Рис. 15. Зависимость  $C$  от  $T$  состояния (76).



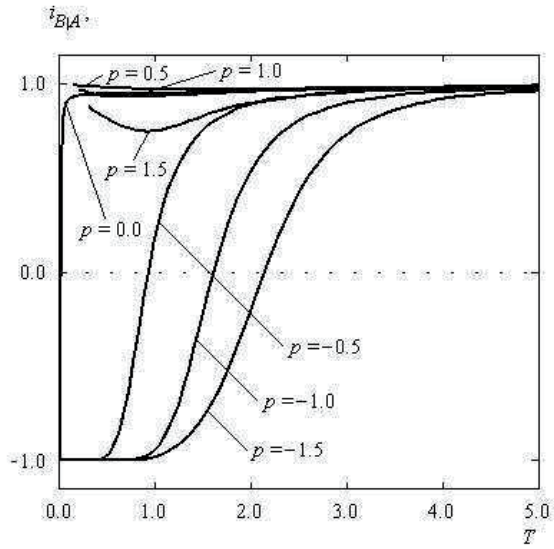


Рис. 16. Зависимость  $i_{B|A}$  от  $T$  состояния (76).

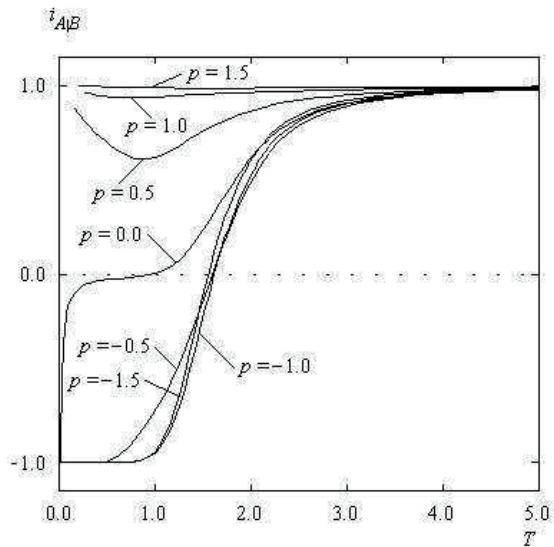


Рис. 17. Зависимость  $i_{A|B}$  от  $T$  состояния (76).

Классическая мера причинности  $\gamma$  (рис. 18) демонстрирует, что в области корректного применения ( $p > 0$ ) направленность причинной связи ожидаемо не зависит от температуры, можно заметить лишь слабое усиление причинной связи с  $T \approx 0.9$ . В области некорректного применения ( $p < 0$ )  $\gamma$  демонстрирует разрывы и смены направления причинной связи. На рис. 19 показано поведение  $c_2$  и  $c'_2$  в зависимости от температуры. Направление причинной связи при любом  $p$  от температуры не зависит, но ее величина меняется. При  $p > 0$  причинность резко увеличивается при низких температурах, оставаясь практически неизменной при  $T > 1.3$  (при  $p = 0.5$  наблюдается очень слабое усиление причинности при высокой температуре). При  $p \leq 0$  причинность напротив резко усиливается в сторону высоких температур и тем резче, чем неоднороднее поле. Поскольку в расчетах было принято  $J = 1$ ,  $B_A = 5$ , то отсюда следует, что гейзенберговское взаимодействие существенно для причинной связи в параллельных полях и становится несущественным в антипараллельных.

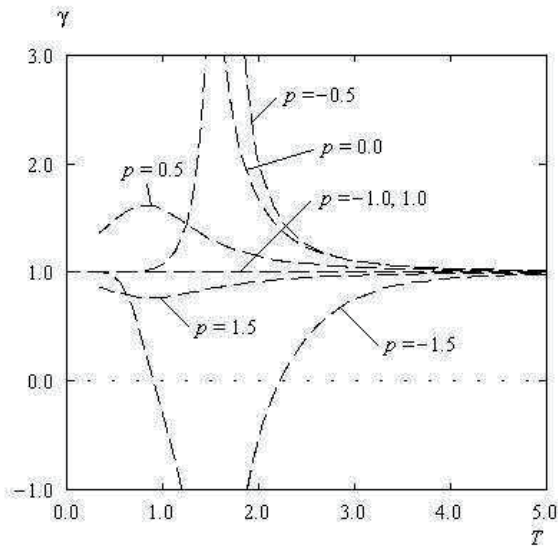


Рис. 18. Зависимость  $\gamma$  от  $T$  состояния (76).

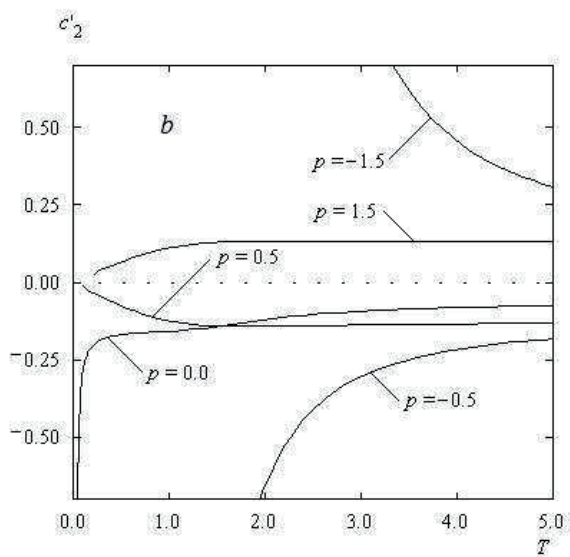
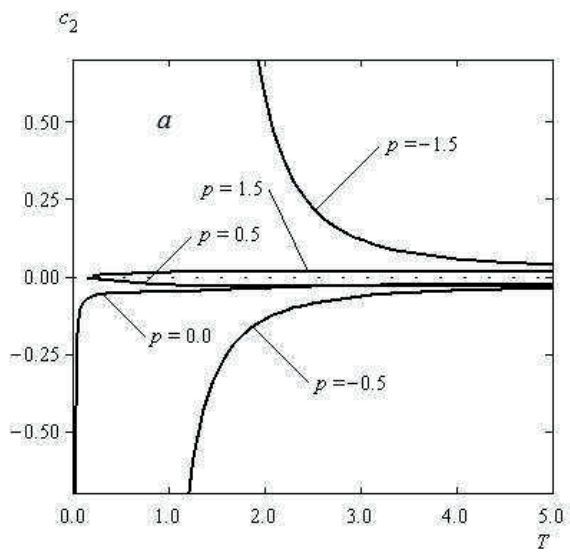


Рис. 19. Зависимость  $c_2$  и  $c'_2$  от  $T$  состояния (76).

## Глава 4. Асимметричная декогеренция

В этой главе мы рассматриваем декогеренцию испытываемую одним из кубитов системы. В силу асимметрии такой декогеренции в системе может индуцироваться причинная связь. Мы начнем с непрчинных состояний, чтобы увидеть этот эффект сам по себе, а затем перейдем к более сложному и интересному случаю декогеренции причинных состояний.

Мы рассмотрим все три вида декогеренции – диссипацию, деполяризацию и дефазирование. Можно заранее предположить, что действие диссипации и деполяризации должно быть противоположным – первая соответствует потере информации, вторая – притоку из окружения. Интересно сравнить возникающие причинные связи со степенью распада запутанности. Кроме того, как было видно из предыдущего, в некоторых случаях диссипация может, напротив генерировать запутанность (пример – термальная запутанность). Дефазирование может индуцировать причинную связь, хотя в силу относительности фазы, это, в отличие от диссипации и деполяризации, будет одна и та же связь, вне зависимости к какой из двух подсистем будет приложена трансформация, соответствующая дефазированию. В этом смысле она не так интересна в связи с распадом запутанности (и перспективами ее подавления). С другой стороны, дефазирование присуще измерению, потому его связь с причинностью в определенных ситуациях, особенно рассматриваемых в главе VI также важна.

В случаях, когда число кубитов в полной системе более двух, в качестве меры запутанности будем использовать негативность [60]:

$$N(X, Y) \equiv N[\rho_{XY}] = \sum_i |\mu_i| \quad (81)$$

где  $\mu_i$  – отрицательные собственные числа частично транспонированной матрицы  $\rho_{XY}^{T_X}$ . Максимально запутанному состоянию соответствует  $N = 0.5$ , отсутствию запутанности соответствует  $N = 0$ .

Для уменьшения громоздкости изложения со всей детальностью мы будем рассматривать только примеры п. 2, опуская в дальнейшем технические подробности.

### 4.1. Модели декогеренции

Три вида декогеренции до степени  $p$  ( $0 \leq p \leq 1$ ) сводятся к следующим трансформациям [61, 62].

Диссипация:

$$\begin{aligned} |0\rangle\langle 0| &\rightarrow |0\rangle\langle 0|, \\ |1\rangle\langle 1| &\rightarrow (1-p)|1\rangle\langle 1| + p|0\rangle\langle 0|, \\ |1\rangle\langle 0| &\rightarrow \sqrt{1-p}|1\rangle\langle 0|, \\ |0\rangle\langle 1| &\rightarrow \sqrt{1-p}|0\rangle\langle 1|. \end{aligned} \quad (82)$$

Деполаризация:

$$\begin{aligned}
 |0\rangle\langle 0| &\rightarrow (1-p)|0\rangle\langle 0| + p\frac{I}{2}, \\
 |1\rangle\langle 1| &\rightarrow (1-p)|1\rangle\langle 1| + p\frac{I}{2}, \\
 |1\rangle\langle 0| &\rightarrow (1-p)|1\rangle\langle 0|, \\
 |0\rangle\langle 1| &\rightarrow (1-p)|0\rangle\langle 1|.
 \end{aligned} \tag{83}$$

Дефазирование:

$$\begin{aligned}
 |1\rangle\langle 0| &\rightarrow (1-p)|1\rangle\langle 0|, \\
 |0\rangle\langle 1| &\rightarrow (1-p)|0\rangle\langle 1|.
 \end{aligned} \tag{84}$$

Мы будем прилагать эти трансформации к одному из кубитов системы. При этом кубит может быть отдельной подсистемой или входить в многокубитную (в наших случаях двухкубитную) подсистему. Вся система будет содержать до трех кубитов, что достаточно для понимания особенностей многокубитных систем (в следующей главе будет исследован пример действительно многокубитной системы – термодинамический предел).

#### 4.2. Декогерированные состояния Белла

Хотя результаты оказываются одинаковыми для всех четырех состояний Белла, для определенности возьмем в качестве исходного состояния синглет:

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle), \tag{85}$$

и положим, что декогеренции (82), (83) или (84) подвержена только вторая частица ( $B$ ).

Диссипированная матрица плотности:

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2} [p|00\rangle\langle 00| + (1-p)|01\rangle\langle 01| - \sqrt{1-p}|01\rangle\langle 10| - \sqrt{1-p}|10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|]. \tag{86}$$

Редуцированные матрицы плотности:

$$\rho_A = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|), \tag{87}$$

$$\rho_B = \frac{1}{2} [(1+p)|0\rangle\langle 0| + (1-p)|1\rangle\langle 1|]. \tag{88}$$

Энтропии:

$$S(AB) = -\frac{p}{2} \log_2 \frac{p}{2} - (1-\frac{p}{2}) \log_2 (1-\frac{p}{2}), \tag{89}$$

$$S(A) = 1, \tag{90}$$

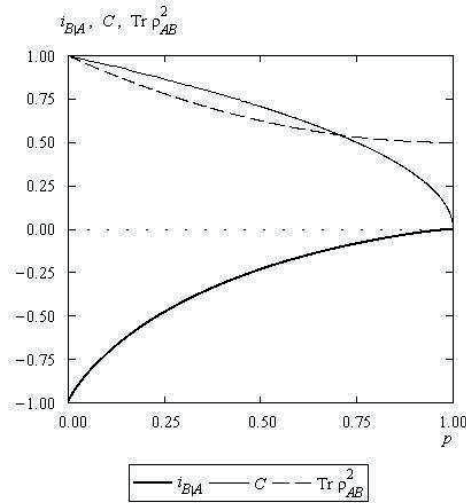
$$S(B) = -\frac{1+p}{2} \log_2 \frac{1+p}{2} - \frac{1-p}{2} \log_2 \frac{1-p}{2}. \quad (91)$$

Функции независимости:

$$i_{B|A} = \frac{S(AB) - 1}{S(B)}, \quad i_{A|B} = S(AB) - S(B). \quad (92)$$

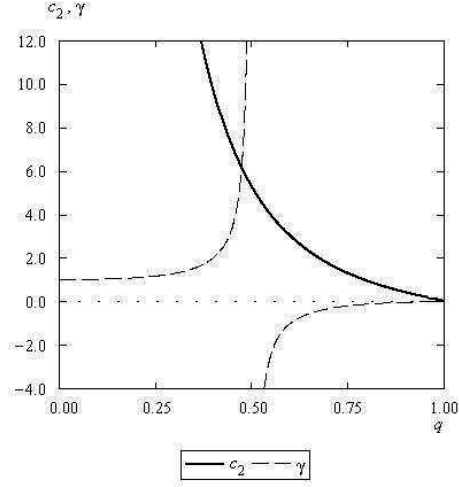
Согласованность:

$$C = \sqrt{1-p}. \quad (93)$$



**Рис. 20.** Зависимость  $i_{B|A}$ ,  $C$  и  $\text{Tr } \rho_{AB}^2$  от степени диссипации  $p$  состояния Белла.

Из рис. 20 следует, что диссипация отличается от далее рассматриваемых деполаризации и дефазирования большими значениями  $C$  во всем диапазоне  $p$ , а  $i_{B|A}$  всюду отрицательна, подобно случаю дефазирования. Но основной интерес представляет рис. 21, на котором показано поведение  $c_2$  и  $\gamma$ .  $c_2 > 0$ , что соответствует причине в  $A$  и следствию в  $B$  в полном соответствии с интуитивным представлением – необратимой поток информации направлен в сторону диссипирующей частицы. Уменьшение  $c_2$  при росте  $p$  также отвечает интуитивному представлению об усилении причинной связи с ростом степени диссипации. Применение же классического критерия причинности – по величине  $\gamma$  при  $0 < p < \frac{1}{2}$  привело бы к противоположному выводу о направленности причинной связи, а при  $\frac{1}{2} < p < 1$  бессмысленно.



**Рис. 21.** Зависимость  $c_2$  и  $\gamma$  от степени диссипации  $p$  состояния Белла.

На энтропийной диаграмме (рис.2) состояние (86) соответствует областям IQ (при  $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$ ) и ПIQ (при  $\frac{1}{2} \leq p \leq 1$ ). Переход между областями не нарушает гладкости  $c_2(p)$ .

Деполаризованная плотность:

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2} \left( \frac{p}{2} |00\rangle\langle 00| + (1 - \frac{p}{2}) |01\rangle\langle 01| + \frac{p}{2} |11\rangle\langle 11| + (1 - \frac{p}{2}) |10\rangle\langle 10| - (1 - p) |01\rangle\langle 10| - (1 - p) |10\rangle\langle 01| \right). \quad (94)$$

Несмотря на то, что (94) несколько отличается от состояния Вернера – деполаризованного триплета, все последующие формулы совпадают с соответствующими (28), (30), (31), (39), (40) и иллюстрирующим результаты рис. 6.

Состояние (85) после дефазирования частицы  $B$ :

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2} (|01\rangle\langle 01| - (1 - p) |01\rangle\langle 10| - (1 - p) |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|), \quad (95)$$

Вновь справедливы (28), (30) и (31), но

$$S(AB) = -(1 - \frac{p}{2}) \log_2(1 - \frac{p}{2}) - \frac{p}{2} \log_2 \frac{p}{2}, \quad (96)$$

$$C = 1 - p. \quad (97)$$

Поэтому при полном дефазировании  $i_{B|A} = 0$ , т.е. подсистемы остаются классически максимально коррелированными. При частичном дефазировании  $C$  и отрицательная  $i_{B|A}$  являются равноправными характеристиками квантовой коррелированности (рис. 22).

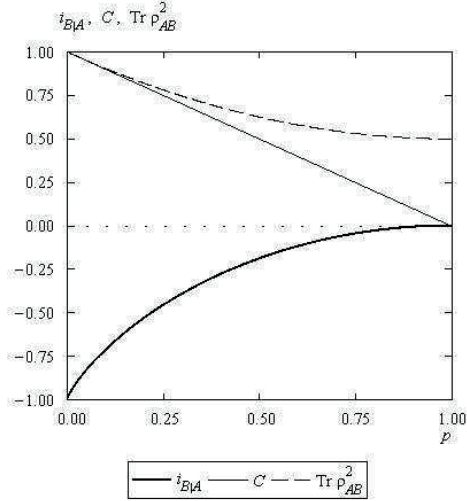


Рис. 22. Зависимость  $i_{B|A}$ ,  $C$  и  $\text{Tr } \rho_{AB}^2$  от степени дефазирования  $p$  состояния Белла

Итак, только диссипация может сделать состояния Белла причинными.

### 4.3. Декогерированное состояние Гринберга-Хорна Цайлингера

Применим преобразования (82), (83), (84) к одной из частиц ГХЦ состояния (24), например  $C$ . За счет воздействия декогеренции, состояние становится смешанным, а матрица плотности в соответствии с типами декогеренции приобретает вид:

$$\rho_{GHZ}^{dissC} = \frac{1}{2} [ |000\rangle\langle 000| + (1-p)|111\rangle\langle 111| + p|110\rangle\langle 110| + \sqrt{1-p}(|000\rangle\langle 111| + |111\rangle\langle 000|) ], \quad (98)$$

$$\rho_{GHZ}^{depolC} = \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{p}{2}\right) (|000\rangle\langle 000| + |000\rangle\langle 111| + |111\rangle\langle 000| + |111\rangle\langle 111|) + \frac{p}{2} (|001\rangle\langle 001| + |110\rangle\langle 110|) \right], \quad (99)$$

$$\rho_{GHZ}^{dephC} = \frac{1}{2} [ |000\rangle\langle 000| + |111\rangle\langle 111| + (1-p)(|000\rangle\langle 111| + |111\rangle\langle 000|) ]. \quad (100)$$

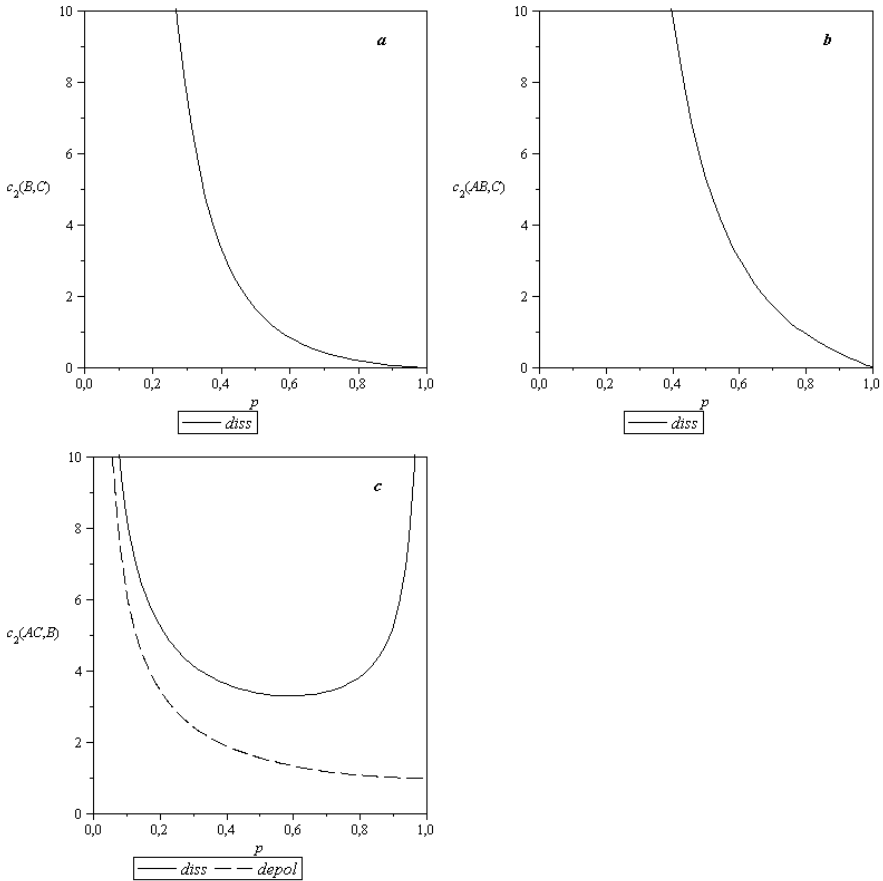
На основе матриц (98)-(100) и соответствующих редуцированных матриц был вычислен полный набор безусловных и условных энтропий. Затем были получены функции независимости (4) для каждой двухсоставной системы, которые в свою очередь использовались для получения соответствующей величины  $c_2$ .



За счет симметрии мы можем выделить лишь четыре уникальных звена (разбиения):  $A-B$ ,  $AB-C$ ,  $A-C$ ,  $AC-B$ . Звено  $A-B$  симметрично ( $i_{A|B} = i_{B|A}$ ), и, следовательно, в нем причинность отсутствует. На рис. 23 представлены меры причинности  $c_2$  для трех остальных звеньев (напомним, что  $c_2(X,Y) > 0$  означает направленность причинной связи  $X \rightarrow Y$ ,  $c_2(X,Y) < 0$  означает  $Y \rightarrow X$ ).

Только диссипация ведет к конечной причинности в каждом разбиении. Если диссипированный кубит образует индивидуальную подсистему (разбиения  $AB-C$  и  $B-C$ ), эта подсистема всегда соответствует следствию ( $c_2(AB,C) > 0$ ,  $c_2(A,C) > 0$ ), и с возрастанием степени диссипации причинность усиливается ( $c_2 \rightarrow +0$  при  $p \rightarrow 1$ ). Тот факт, что  $c_2(AB,C) > c_2(A,C)$  объяснен в [63, 64] большей смешанностью редуцированного состояния  $\rho(AC)$  по сравнению с  $\rho(ABC)$ :  $S(AC) > S(ABC)$ , а смешанность является необходимым условием причинности. В свою очередь более сильная смешанность  $\rho(AC)$  объясняется взаимодействием частицы  $A$  как с частицей  $B$ , так и с диссипирующей частицей  $C$ , т.е. взаимодействием с неконтролируемой окружающей средой; в то время как в  $\rho(ABC)$  имеет место лишь взаимодействие с окружающей средой. Отметим, что в случае диссипации одной из частиц в двухсоставном аналоге ГХЦ состояния (состоянии Белла) все соответствующие энтропии, а следовательно и все другие параметры, включая  $c_2$  полностью совпадают с соответствующими параметрами звена  $AB-C$  ГХЦ состояния.

Нетривиальным образом ведет себя причинность в звене  $AC-B$ . В отличие от вышерассмотренных случаев, пара  $AC$ , содержащая диссипирующую частицу  $C$ , соответствует причине. Фактически диссипация  $C$  уменьшает  $S(C)$  вплоть до 0 (при  $p=1$   $\rho(C) = |0\rangle\langle 0|$  – основное состояние). С другой стороны, диссипация  $C$  открывает подсистему  $AC$  и  $S(AC)$  достигает максимума при  $p = \frac{1}{2}$  равного  $\frac{3}{2}$  [63, 64] в то время как  $S(B) = \text{const} = 1$ . Частица  $B$  всегда соответствует следствию, но величина  $c_2$  ведет себя немонотонно: она достигает минимума при  $p = 0.594$ . Что бы объяснить это явление, отметим, что при  $p=0$  состояние (97) чистое, и, следовательно,  $c_2(AC,B) \rightarrow \infty$ ; при  $p=1$  состояние (97) максимально смешанное, но  $S(AC) = S(B)$  (полностью диссипированная частица  $C$  «исчезла»), поэтому вновь  $c_2(AC,B) \rightarrow \infty$ . Знаменатель выражения (13) для  $c_2(AC,B)$ :  $i_{AC|B} - i_{B|AC}$  имеет максимум при  $p = 0.401$  [63, 64], в то время как числитель, представляющий собой соотношение  $(1 - i_{AC|B})(1 - i_{B|AC})$  убывает с ростом  $p$ , поэтому  $\min c_2$  смещен к большему, по сравнению с  $1/2$ , значению  $p$ . Как видно из рис. 23, причинность в звене  $AC-B$  преобладает над причинностями в других звеньях при малой степени диссипации ( $p < 0.387$ ).



**Рис. 23.** Причинность в ГХЦ-состоянии при декогеренции кубита  $C$ .

Деполяризация ведет лишь к причинности  $AC \rightarrow B$  (рис. 23с), т.е. с той же направленностью как диссипация, но с монотонным усилением при росте  $p$ , достигая  $c_2 = 1$  при  $p = 1$ .

Дефазирование ГХЦ не ведет к возникновению причинности.

На рис. 24 представлена негативность. Можно было ожидать, что за счет чистоты максимально запутанного состояния (а, следовательно, отсутствия в нем причинности), причинность тем сильнее, чем слабее запутанность. Однако, сравнивая рис. 23 и 24, видим, что это в общем случае это не так.

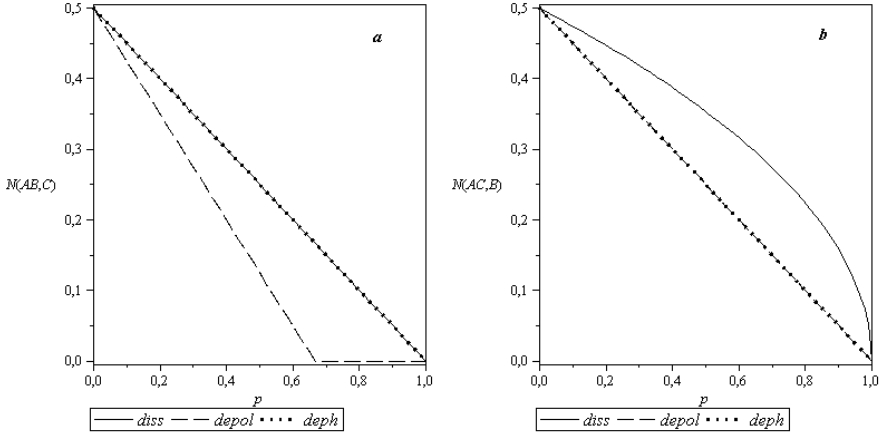


Рис. 24. Негативность в ГХЦ-состоянии при декогеренции кубита  $C$ .

#### 4.4. Декогерированное W-состояние

Применив те же декогерерирующие преобразования к третьей частице  $C$  состояния (25), получим:

$$\rho_{СКW}^{dissC} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} |010\rangle\langle 010| + \frac{1}{\sqrt{2}} (|010\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 010|) + |100\rangle\langle 100| + \frac{1}{2} (1-p) |001\rangle\langle 001| + \frac{1}{2} p |000\rangle\langle 000| + \sqrt{1-p} \left( \frac{1}{2} |001\rangle\langle 010| + \frac{1}{\sqrt{2}} |001\rangle\langle 100| + \frac{1}{2} |010\rangle\langle 001| + \frac{1}{\sqrt{2}} |100\rangle\langle 001| \right) \right], \quad (101)$$

$$\rho_{СКW}^{depolC} = \frac{1}{2} \left\{ (1-p) \left[ \frac{1}{2} (|001\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 001| + |100\rangle\langle 100|) + \frac{1}{\sqrt{2}} (|001\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 001|) \right] + \left( 1 - \frac{p}{2} \right) \left[ \frac{1}{2} (|001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010|) + \frac{1}{\sqrt{2}} (|010\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 010|) \right] + \frac{p}{2} \left[ \frac{1}{2} (|000\rangle\langle 000| + |011\rangle\langle 011|) + \frac{1}{\sqrt{2}} (|011\rangle\langle 101| + |101\rangle\langle 011|) + |101\rangle\langle 101| \right] \right\}, \quad (102)$$

$$\rho_{СКW}^{dephC} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (|001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010|) + \frac{1}{\sqrt{2}} (|010\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 010|) + |100\rangle\langle 100| + \frac{1}{2} (1-p) \left[ |001\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 001| + \sqrt{2} (|001\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 001|) \right] \right\}; \quad (103)$$

Рис. 25 показывает, что декогеренция W-состояния отличается от ГХЦ тем, что деполаризация ведет к конечной причинности во всех трех разбиениях, дефазирование – тоже, в одном ( $AC - B$ ).

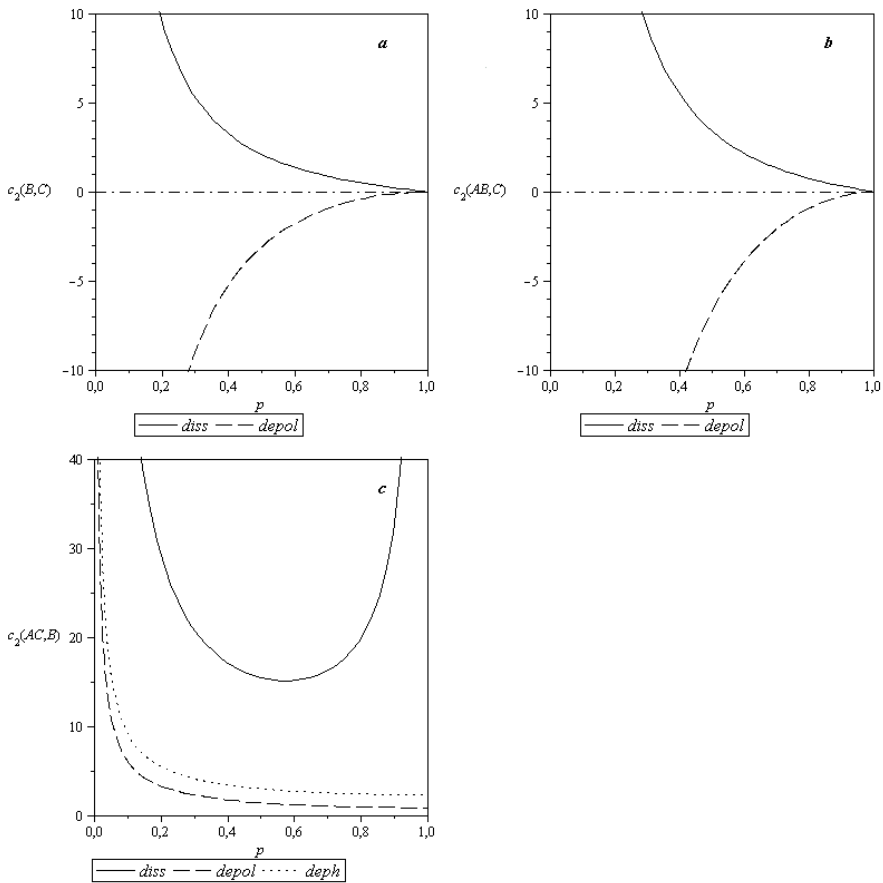
Как и в случае с диссипацией ГХЦ-состояния, диссипирующая частица  $C$  всегда соответствует следствию ( $c_2(AB, C) > 0$ ,  $c_2(A, C) > 0$ ) и с увеличением степени диссипации  $p$  причинность усиливается ( $c_2 \rightarrow +0$  при  $p \rightarrow 1$ ). Тот факт, что  $c_2(AB, C) > c_2(A, C)$  объясняется большей смешанностью

редуцированного состояния  $\rho(AC)$  по сравнению с  $\rho(ABC)$ :  $S(AC) > S(ABC)$ , как и вышеизложенном случае. Также аналогично ГХЦ-состоянию, в звене  $AC-B$  пара  $AC$ , содержащая в себе диссипирующую частицу  $C$ , соответствует причине. Отличие заключается в том, что минимум достигается при  $p=0.576$  и  $c_2$  для данного звена выше, чем в двух других звеньях, т.е. причинность слабее при любых  $p$ .

При деполяризации, в отличие от диссипации, если декогерированный кубит представляет индивидуальную подсистему (разбиения  $AB-C$  и  $B-C$ ), эта подсистема всегда соответствует причине ( $c_2(AB,C) < 0$ ,  $c_2(B,C) < 0$ ) и с ростом степени деполяризации причинность усиливается ( $c_2 \rightarrow -0$  при  $p \rightarrow 1$ ). Это также соответствует интуитивному ожиданию – необратимый поток информации (шум) входит через деполяризованную подсистему и распространяется к другой. Тот факт, что  $|c_2(AB,C)| > |c_2(B,C)|$  также объясняется больше смешанностью редуцированного состояния  $\rho(BC)$  по сравнению с  $\rho(ABC)$ . Если же декогерированный кубит входит в двухкубитную подсистему, то сравнение рис. 23с и 25с показывает, что в обоих случаях имеется одинаковая причинность  $AC \rightarrow B$ .

В  $W$ -состоянии дефазирование в одном из разбиений (рис 25с) индуцирует причинность, сходную с деполяризацией, но слабее.

Степень запутанности (негативность) тех же разбиений представлена на рис. 26. Сравнение с рис. 25 показывает, что декогеренция причины всегда разрушает запутанность сильнее, чем декогеренция следствия. Однако этот вывод не вполне корректен, так как делается из сравнения разных разбиений [65].



**Рис. 25.** Причинность в W-состоянии при декогеренции кубита  $C$ .

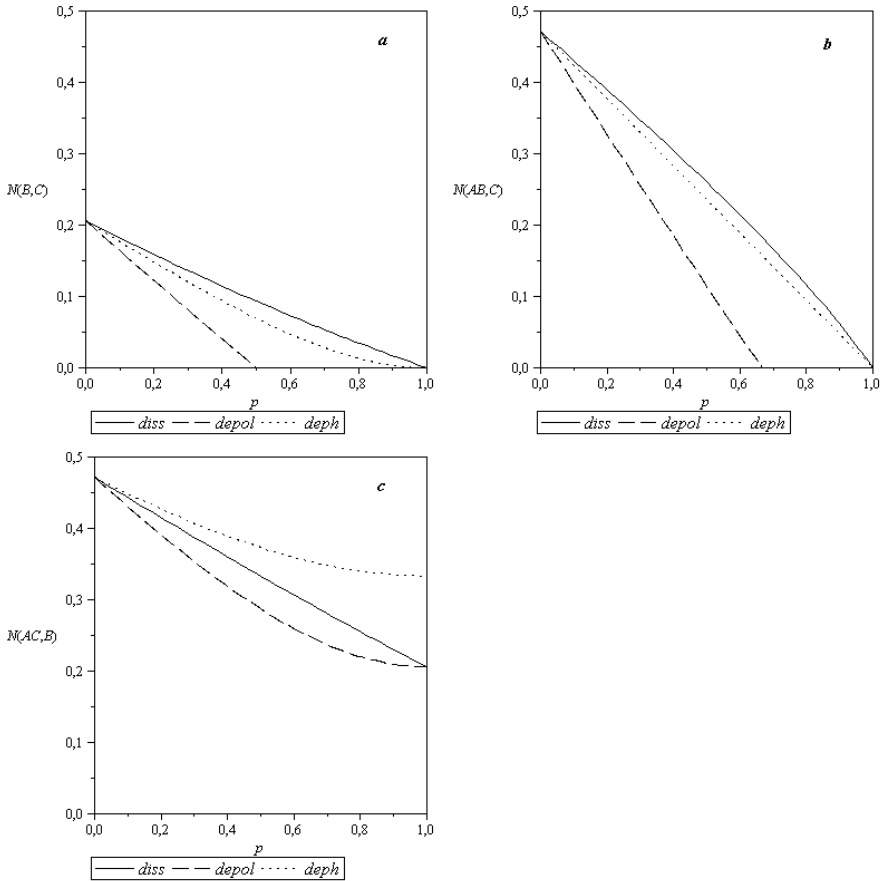


Рис. 26. Негативность в W-состоянии при декогеренции кубита  $C$ .

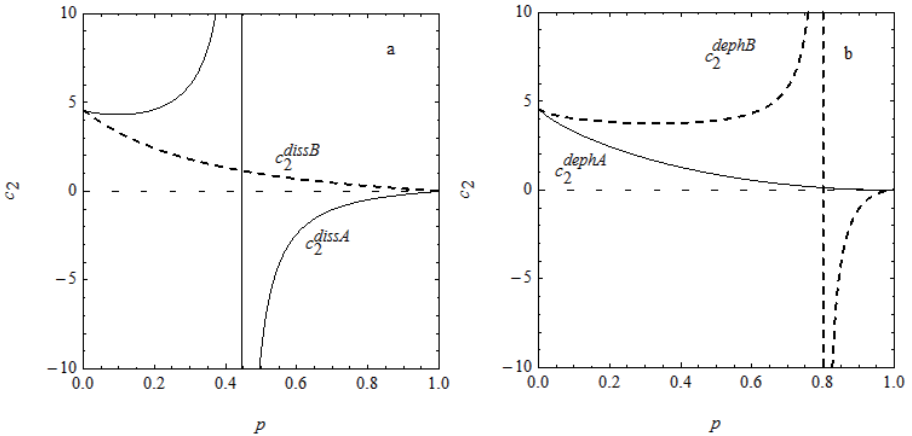
#### 4.5. Декогерированное квантово-классическое состояние

С этого примера мы начинаем рассматривать асимметричную декогеренцию причинных состояний, а поскольку состояние (68) является двухкубитным, проблему связи причинности с распадом запутанности рассмотрим вначале проще в отсутствии выбора разбиения. Учитывая отмеченную в начале главы независимость индуцированной дефазированием причинности от ее приложения к той или другой части двухсоставной системы, мы сосредоточимся на диссипации и деполяризации.

В работе [37] было обнаружено, что как ни странно, декогеренция (путем деполяризации) может идти быстрее при взаимодействии окружения с классической подсистемой. Этот контринтуитивный эффект назван «аномальным распадом запутанности».

Для сопоставимости зададим значения параметров состояния (68) такими же, как выбраны в статье [37]:  $q=0.6$ ,  $a^2=0.75$ . Тогда для получившегося исходного состояния будем иметь  $S_B=0.562$ ,  $S_{AB}=0.673$  и  $S_A=0.688$ . Таким образом, подсистема  $A$  – квантовая,  $B$  – классическая. Для данного состояния  $c_2=4.590 > 0$  [66], т.е. причинная связь имеет направление  $A \rightarrow B$ .

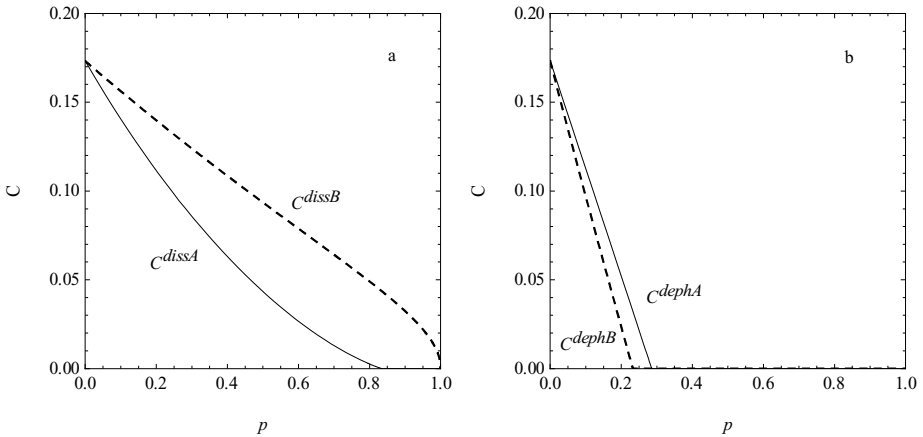
На рис. 27а показано поведение  $c_2^{dissA}(A,B)$  и  $c_2^{dissB}(A,B)$  в ситуациях, когда диссипации (82) подвергаются подсистемы  $A$  и  $B$  соответственно. В первом случае наблюдается разрыв при  $p=0.444$ , где  $c_2^{dissA}(A,B)$  меняет знак, что соответствует изменению направления причинности с  $A \rightarrow B$  на  $B \rightarrow A$ . Далее с ростом  $p$  происходит усиление причинной связи до предельного значения:  $c_2^{dissA}(A,B) \rightarrow -0$  при  $p \rightarrow 1$ . В случае диссипации  $B$  происходит лишь монотонное усиление изначальной причинности  $A \rightarrow B$  до предельного значения  $+0$ . На основании полученных результатов мы можем заключить, что при диссипации (68) подсистема, подверженная декогеренции, становится стоком информации, т.е. следствием.



**Рис. 27.** Причинность при различных вариантах декогеренции квантово-классического состояния: (а) – при диссипации подсистемы  $A$  (сплошная кривая) и подсистемы  $B$  (пунктирная кривая); (б) – при деполяризации подсистемы  $A$  (сплошная кривая) и подсистемы  $B$  (пунктирная кривая).

Поведение причинностей при деполяризации (83) различных частиц представлено на рис. 27б. Видно, что ситуация выглядит диаметрально противоположным образом: в случае декогеренции  $A$  происходит монотонное усиление причинной связи до максимального значения, а в случае декогеренции  $B$  происходит инверсия направления причинности от  $A \rightarrow B$  на  $B \rightarrow A$  при  $p = 0.8$ . Таким образом, заключаем, что при деполяризации (68) подсистема, подверженная декогеренции, становится источником информации, т.е. причиной.

Теперь рассмотрим поведение запутанности в четырех, рассмотренных выше, вариантах декогеренции. В качестве меры используем согласованность.  $C$  Для исходного состояния ее значение равно 0.173. На рис. 28а представлено поведение согласованностей  $C^{dissA}$  и  $C^{dissB}$  под действием диссипации на подсистемы  $A$  и  $B$  соответственно. В обоих случаях происходит разрушение запутанности, но при диссипации  $A$  оно идет интенсивнее:  $C^{dissA} < C^{dissB}$  при  $p > 0$ . Таким образом, приходим к заключению, что для диссипации наиболее уязвимой является квантовая подсистема  $A$ . В случае деполяризации, представленном на рис. 28б, ситуация противоположна: при  $p > 0$   $C^{dephB} < C^{dephA}$ . Таким образом, более уязвимой для деполяризации является классическая подсистема, и мы как раз сталкиваемся с явлением «аномального разрушения запутанности», ранее полученным в [37] при более сложной модели деполяризации (включающей также периодическую унитарную эволюцию).



**Рис. 28.** Согласованность при различных вариантах декогеренции квантово-классического состояния: (а) – при диссипации подсистемы  $A$  (сплошная кривая) и подсистемы  $B$  (пунктирная кривая); (б) – при деполяризации подсистемы  $A$  (сплошная кривая) и подсистемы  $B$  (пунктирная кривая).

Сравним поведение причинностей (рис. 27) и согласованностей (рис. 28). Легко просматривается следующее правило: с точки зрения разрушения запутанности для асимметричного состояния более деструктивен процесс декогеренции, при котором происходит изменение направления исходной причинной связи. Именно такая ситуация имеет место при диссипации квантовой подсистемы  $A$  и деполяризации классической подсистемы  $B$ . Таким образом, относительная уязвимость подсистем определяется соответствием исходного направления причинности внутри асимметричного состояния и направления причинности, создаваемой декогеренцией. Образно говоря, с



точки зрения сохранения запутанности не следует «гладить систему против шерсти».

#### 4.6. Декогерированное состояние Коффмана-Кунду-Вуттерса

Декогерированное СКВ-состояние (53), имеющие исходно две причинные связи  $A \rightarrow B$  и  $A \rightarrow C$  образует более богатое распределение причинности. Для начала рассмотрим декогеренцию исходного следствия  $C$  (случай  $B$  эквивалентен):

$$\rho_{СКВ}^{dissC} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} |010\rangle\langle 010| + \frac{1}{\sqrt{2}} (|010\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 010|) + |100\rangle\langle 100| + \frac{1}{2} (1-p) |001\rangle\langle 001| \right. \\ \left. + \frac{1}{2} p |000\rangle\langle 000| + \sqrt{1-p} \left( \frac{1}{2} |001\rangle\langle 010| + \frac{1}{\sqrt{2}} |001\rangle\langle 100| + \frac{1}{2} |010\rangle\langle 001| + \frac{1}{\sqrt{2}} |100\rangle\langle 001| \right) \right], \quad (104)$$

$$\rho_{СКВ}^{depolC} = \frac{1}{2} \left\{ (1-p) \left[ \frac{1}{2} (|001\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 001| + |100\rangle\langle 100|) + \frac{1}{\sqrt{2}} (|001\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 001|) \right] \right. \\ \left. + \left( 1 - \frac{p}{2} \right) \left[ \frac{1}{2} (|001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010|) + \frac{1}{\sqrt{2}} (|010\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 010|) \right] \right. \\ \left. + \frac{p}{2} \left[ \frac{1}{2} (|000\rangle\langle 000| + |011\rangle\langle 011|) + \frac{1}{\sqrt{2}} (|011\rangle\langle 101| + |101\rangle\langle 011|) + |101\rangle\langle 101| \right] \right\}, \quad (105)$$

$$\rho_{СКВ}^{dephC} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (|001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010|) + \frac{1}{\sqrt{2}} (|010\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 010|) + |100\rangle\langle 100| \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (1-p) \left[ |001\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 001| + \sqrt{2} (|001\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 001|) \right] \right\}. \quad (106)$$

Результаты расчета  $c_2$  представлены на рис. 29 (кроме звена  $A-B$ , в котором параметры остаются постоянными:  $c_2(A, B) = 5.30$ ,  $N(A, B) = \frac{1}{4}$ ).

Лишь пара  $B-C$  исходно симметрична и, следовательно, для нее следует ожидать поведения  $c_2$  такого же, как в  $W$ -состоянии. Действительно, рис.29а выглядит качественно похожим на рис.25а, но при деполаризации наблюдается более сильная причинность.

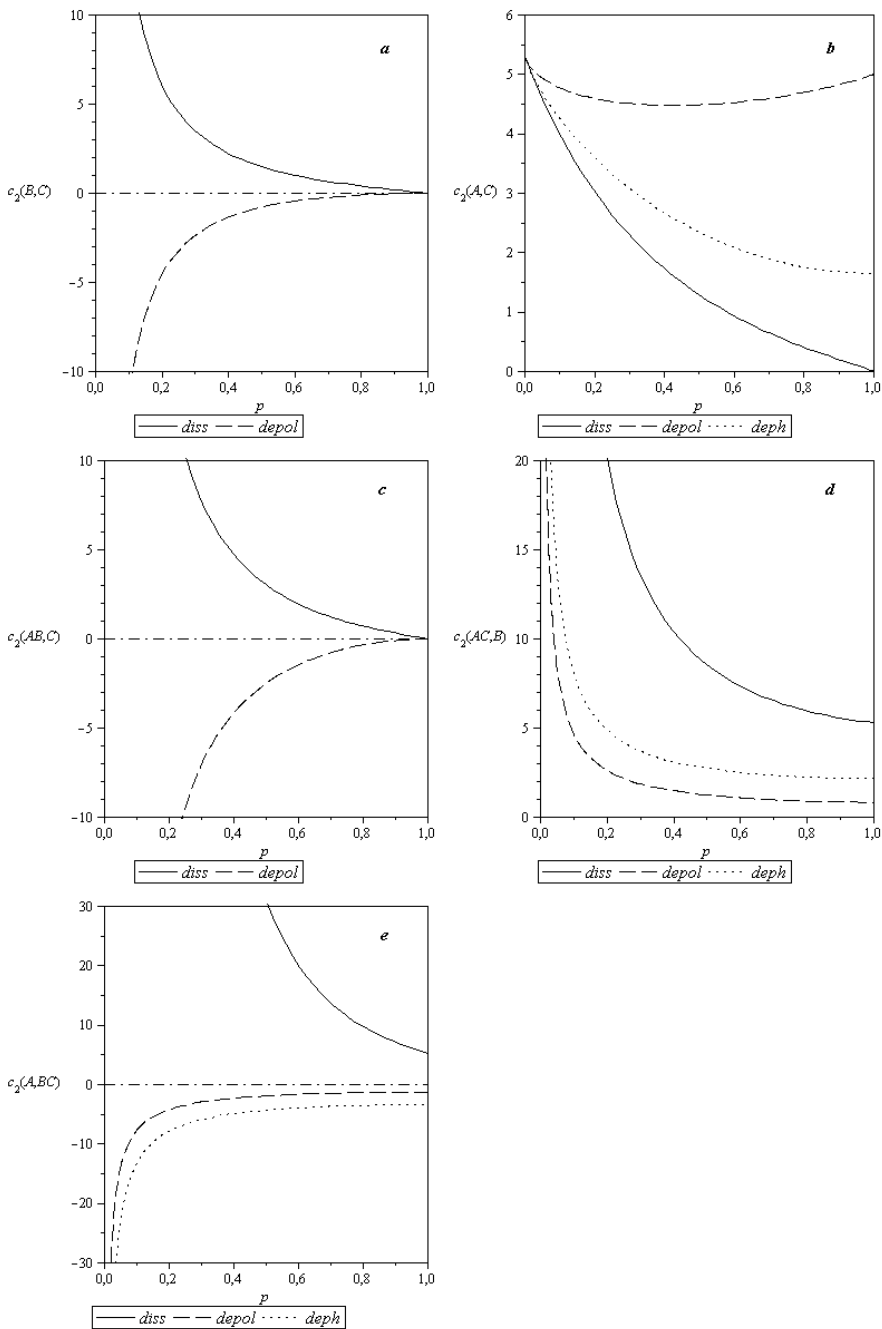


Рис. 29. Причинность в СКВ-состоянии при декогеренции кубита  $C$ .

Как мы видели ранее, диссипация и деполяризация, действующие на однокубитную подсистему индуцируют противоположно направленные причинные связи с другой подсистемой. Но в паре  $A-C$  (рис. 29b) все три вида декогеренции усиливают исходную причинность  $A \rightarrow C$ . Самая сильная причинность наблюдается в интуитивно ожидаемом случае диссипации. Для деполяризации можно было ожидать обращения или, по крайней мере, ослабления исходной причинности, но она оказалась усиленной, хотя и немонотонно, с  $\min c_2$  при  $p = 0.427$ . Так получается потому, что для СКW<sup>C</sup> состояния  $S(A) = 1 = \max$ , а причинную связь невозможно обратить без уменьшения  $S(A)$  ниже этого максимума. Деполяризация  $C$  при относительно малом  $p$  открывает больше подсистему  $AC$  и усиливает исходную причинность. При  $p \rightarrow 1$   $S(C)$  возрастает до  $S(C) = 1 = \max$  и причинность возвращается к исходному уровню.

В случае разбиения  $AB-C$  (рис. 29c) мы имеем тот же что и для W-состояния (рис. 25b) и интуитивно ожидаемый результат: Диссипированная подсистема  $C$  – следствие по отношению к  $AB$ , тогда как деполяризованная подсистема  $C$  – причина.

Если декогерированный кубит  $C$  включен в двухкубитную подсистему  $AC$  (рис. 29d) наблюдается причинность  $AC \rightarrow B$  при любом виде декогеренции. Отличие от W-состояния сводится к большему и монотонному усилению причинности при диссипации. Случай разбиения  $A-BC$  (рис. 29e) близок, но при деполяризации и дефазировании  $BC \rightarrow A$ , а при диссипации  $A \rightarrow BC$ . Эта особенность диссипации ясна. Действительно, при полной диссипации ( $p = 1$ ) частица  $C$  «исчезает» из своей двухчастичной подсистемы и в результате  $c_2(AC, B) = c_2(A, BC) = c_2(A, B) = 5.30$ .

Декогеренция исходной причины  $A$ :

$$\rho_{СКW}^{dissA} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (|001\rangle\langle 001| + |001\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010|) + (1-p)|100\rangle\langle 100| + p|000\rangle\langle 000| + \sqrt{\frac{1-p}{2}} (|001\rangle\langle 100| + |010\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 001| + |100\rangle\langle 010|) \right], \quad (107)$$

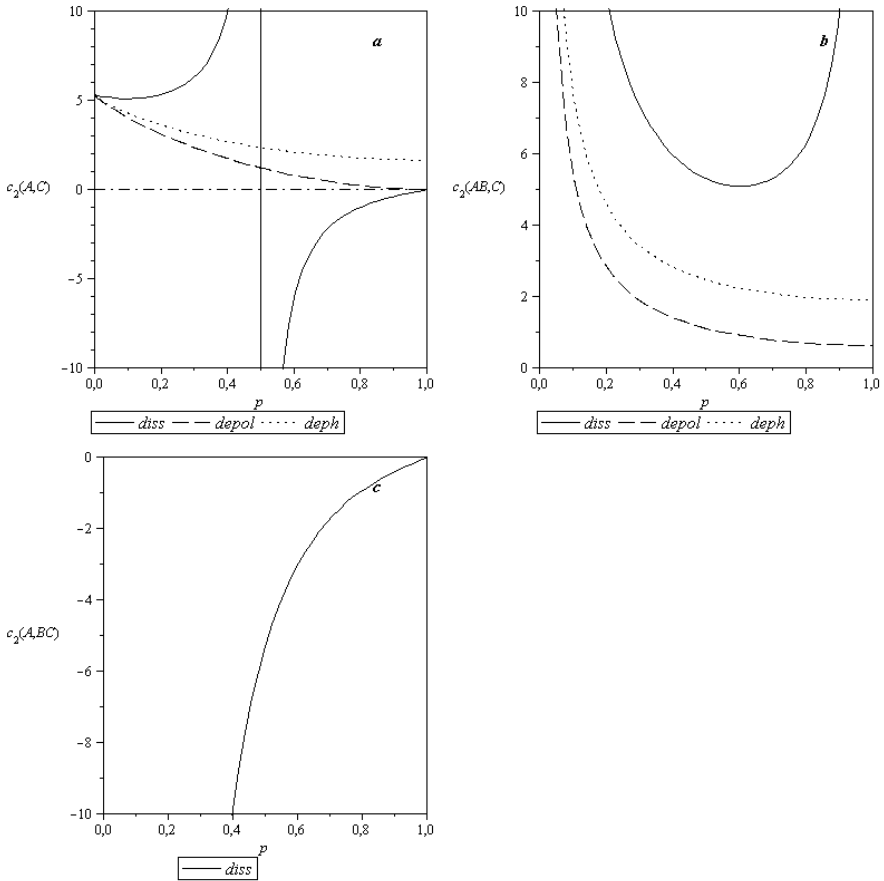
$$\rho_{СКW}^{depolA} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1-p}{\sqrt{2}} (|001\rangle\langle 100| + |010\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 001| + |100\rangle\langle 010|) + \left(1 - \frac{p}{2}\right) \left[ \frac{1}{2} (|001\rangle\langle 001| + |001\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010|) + |100\rangle\langle 100| \right] + \frac{p}{2} \left[ |000\rangle\langle 000| + \frac{1}{2} (|101\rangle\langle 101| + |101\rangle\langle 110| + |110\rangle\langle 101| + |110\rangle\langle 110|) \right] \right\}, \quad (108)$$

$$\rho_{СКW}^{dephA} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (|001\rangle\langle 001| + |001\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| + 2|100\rangle\langle 100|) + \frac{1}{\sqrt{2}} (1-p) (|001\rangle\langle 100| + |010\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 001| + |100\rangle\langle 010|) \right]. \quad (109)$$

Причинная картина представлена на рис. 30 (кроме звена  $B-C$ , для которого параметры остаются постоянными  $c_2(B,C) \rightarrow \pm\infty$ ,  $N(B,C) = \frac{\sqrt{2}-1}{4}$ ; разбиение  $AB-C$  эквивалентно представленному  $AC-B$ ). Можно было ожидать, что в результате возрастающей диссипации  $A$ , первоначальная причинная связь  $A \rightarrow C$  будет вначале уменьшаться до исчезновения при некотором  $p$ , после чего направление причинности обратится с дальнейшим предельным усилением связи  $C \rightarrow A$  по мере стремления  $p$  к 1. На рис.30а видно, что действительно  $c_2(A,C)$  изменяет знак при  $p = \frac{1}{2}$ . Но изменение положительного  $c_2(A,C)$  (соответствующего направлению причинной связи  $A \rightarrow C$ ) оказывается не монотонным, а имеет интуитивно не ожидавшийся минимум равный 5.08 при  $p = 0.103$ . Далее, в паре  $A-C$  (рис. 30а) деполяризация ведет к значительному и монотонному усилению причинности по сравнению с  $СКW^C$  (рис. 30b). С одной стороны, это согласуется с интуицией (деполяризованная  $A$  становится более интенсивным информационным источником). С другой стороны, можно легко показать, что  $S(A)$  и  $S(C)$  остаются независимыми от  $p$ , что демонстрирует, что нельзя рассматривать асимметрию безусловных энтропий  $\alpha$  как достаточное условие или меру причинности.

В разбиении  $AB-C$  (рис. 30b) направленность причинной связи  $AB \rightarrow C$  при любом виде декогеренции, при этом кривые  $c_2$  для деполяризации и дефазирования монотонные как на рис. 29с, в то время как кривая для диссипации имеет минимум при  $p = 0.603$ . Эта кривая стремится к бесконечности при  $p \rightarrow 1$ , потому что при полной диссипации  $A$  разбиение  $AB-C$  становится эквивалентным симметричному  $B-C$ . Стоит отметить, что при диссипации  $\min c_2(AC,B) = \min c_2(A,C)$  и имеется интересное соотношение, (справедливое не только для данного примера):  $p(\min c_2(AC,B)) = 1 - p(|c_2(A,C)| = \infty) + p(\min c_2(A,C))$ .

В отличие от случая декогеренции одночастичной подсистемы – исходного следствия  $C$  (рис. 29с), в случае декогеренции одночастичной подсистемы – исходной причины  $A$  (рис. 30с) только диссипация индуцирует причинную связь, при этом  $A$  становится следствием. Монотонное возрастание отрицательной  $c_2(A,BC)$  просто отражает усиление причинности с увеличением степени диссипации следствия. В то же время  $|c_2(AB, C^{diss})| \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow 1$  быстрее чем  $|c_2(A^{diss}, BC)|$ . Это отражает влияние исходной (при  $p = 0$ ) причинности  $A \rightarrow C$ .



**Рис. 30.** Причинность в СКW-состоянии при декогеренции кубита  $A$ .

На рис. 31 и 32 показаны негативности, соответствующие причинностям на рис. 29 и 30. Корректное сопоставление возможно [65], если при нем фиксируется вид декогеренции.

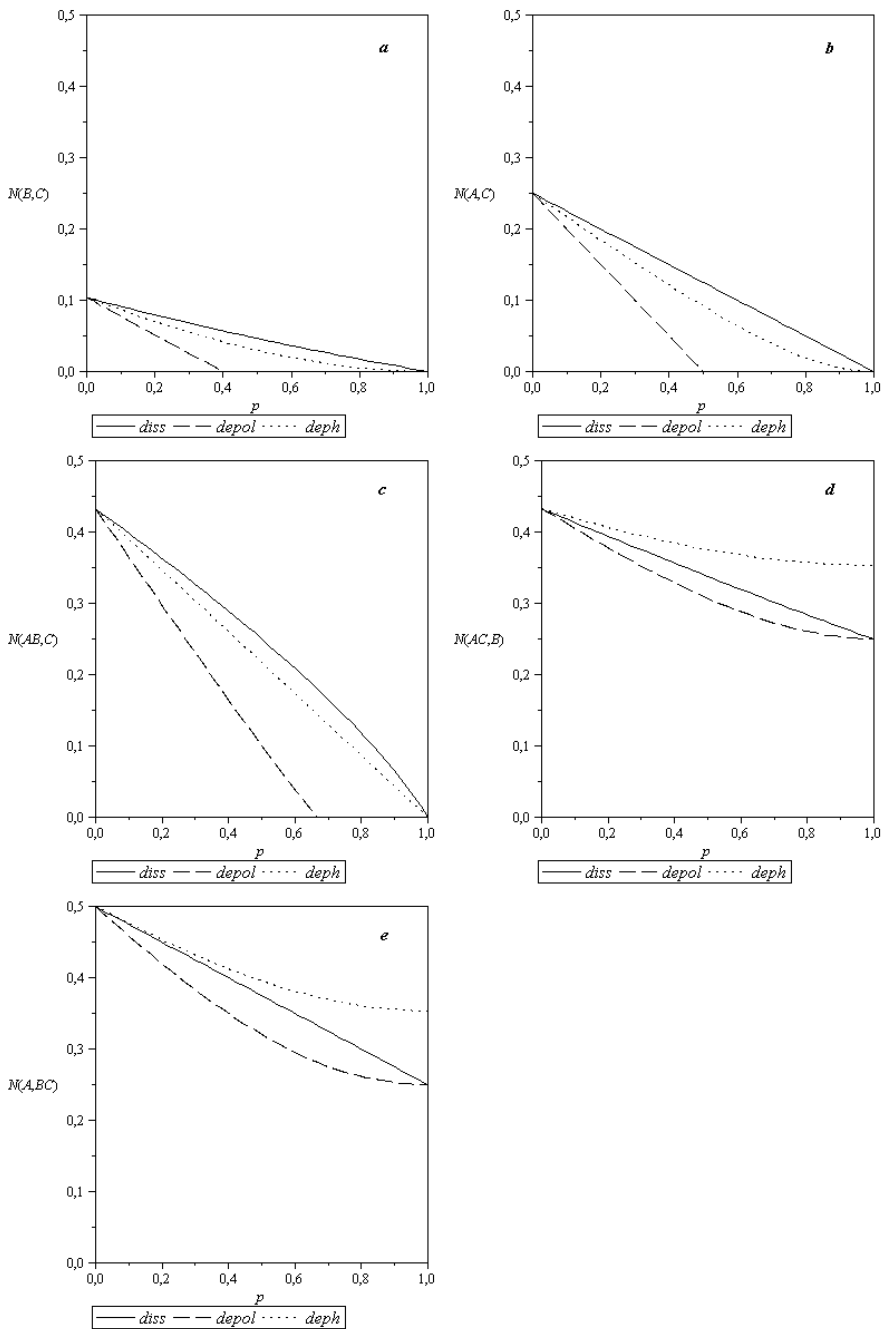
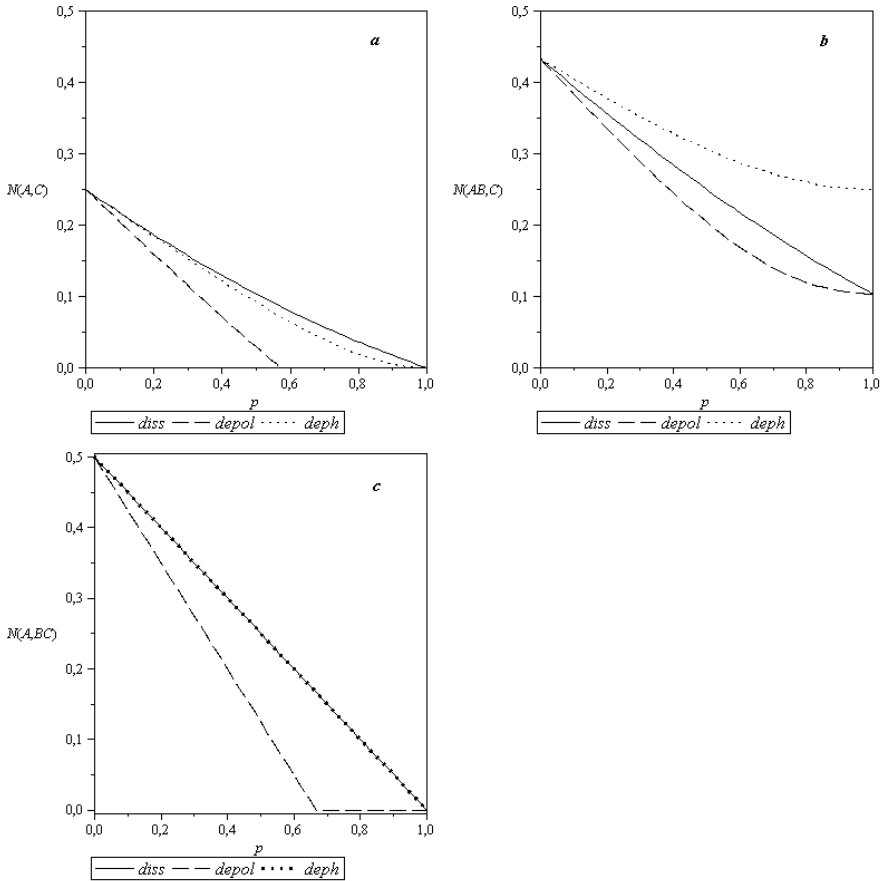


Рис. 31. Негативность в СКW-состоянии при декогеренции кубита  $C$ .



**Рис. 32.** Негативность в СКВ-состоянии при декогеренции кубита  $A$ .

Начнем с редуцированных состояний. При этом случай дефазирования, как отмечалось в начале главы, к делу не относится ( $N^{dephC} = N^{dephA}$ ). В диссипированном СКВ-состоянии (рис. 31b and 32a)  $N^{dissC} > N^{dissA}$ . Как мы уже знаем, диссипация  $A$  ведет к обращению исходной причинности (рис.30a); диссипация  $C$  усиливает исходную причинность (рис. 29b):  $|c_2(A, dissC)| < |c_2(dissA, C)|$ . Следовательно, диссипация, усиливающая исходную причинность, разрушает запутанность в меньшей степени, чем диссипация, обращающая причинность.

В деполаризованном СКВ-состоянии (рис. 31b and 32a)  $N^{depolC} < N^{depolA}$ . И, как мы знаем, деполаризация  $A$  ведет к резкому усилению исходной причинности (рис. 30a); деполаризация  $C$  только слегка меняет ее (рис. 29b):  $|c_2(A, depolC)| > |c_2(depolA, C)|$ . Следовательно, деполаризация, усиливающая

исходную причинность, разрушает запутанность в меньшей степени, чем деполаризация, действующая почти безразлично или против нее.

Оба заключения совпадают. Декогеренция путем диссипации и деполаризации, действующие в направлении исходной причинности лучше, с точки зрения выживания запутанности, чем действующие против этой причинности. Мы получили тот же вывод, что при анализе квантово-классических состояний – для сохранения запутанности не следует «гладить систему против шерсти».

Как следствие, сопоставив все четыре вышеприведенных неравенства для  $N$  и  $c_2$ , мы получаем, что более сильная запутанность соответствует более сильной причинности. Конечно, такой вывод не универсален, но он показывает, что менее информационно-симметричные состояния могут быть более запутанными.

Теперь рассмотрим декогеренцию в разбиениях, где декогерированный кубит находится в подсистеме  $AC$ . То есть подсистема состоит из исходных причины и следствия. Таким образом, мы рассматриваем влияние изменения «внутренней» причинности на запутанность в разбиении  $AC-B$  в СКW-состоянии. Соответствующие кривые на рис. 31c and 32b свидетельствуют, что при любом из трех видов декогеренции при любом фиксированном  $p$ :  $N^{decohC} > N^{drcohA}$ . Вывод нетривиален: декогеренция внутреннего следствия разрушает запутанность всей системы в меньшей степени, чем декогеренция внутренней причины.

#### 4.7. Декогерированное WRr-состояние

Как мы помним из предыдущей главы, WRr-состояние сходно СКW-состоянием, но обладает более резко выраженной причинностью. Аналогично предыдущему, рассмотрим в WRr-состоянии (59), сначала декогеренцию исходного следствия  $C$  (случай  $B$  эквивалентен):

$$\rho_{СКW}^{dissC} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} |010\rangle\langle 010| + \frac{1}{\sqrt{2}} (|010\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 010|) + |100\rangle\langle 100| + \frac{1}{2} (1-p) |001\rangle\langle 001| + \frac{1}{2} p |000\rangle\langle 000| + \sqrt{1-p} \left( \frac{1}{2} |001\rangle\langle 010| + \frac{1}{\sqrt{2}} |001\rangle\langle 100| + \frac{1}{2} |010\rangle\langle 001| + \frac{1}{\sqrt{2}} |100\rangle\langle 001| \right) \right], \quad (110)$$

$$\rho_{СКW}^{depolC} = \frac{1}{2} \left\{ (1-p) \left[ \frac{1}{2} (|001\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 001| + |100\rangle\langle 100|) + \frac{1}{\sqrt{2}} (|001\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 001|) \right] + \left( 1 - \frac{p}{2} \right) \left[ \frac{1}{2} (|001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010|) + \frac{1}{\sqrt{2}} (|010\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 010|) \right] + \frac{p}{2} \left[ \frac{1}{2} (|000\rangle\langle 000| + |011\rangle\langle 011|) + \frac{1}{\sqrt{2}} (|011\rangle\langle 101| + |101\rangle\langle 011|) + |101\rangle\langle 101| \right] \right\}, \quad (111)$$

$$\rho_{СКW}^{drcohA} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (|001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010|) + \frac{1}{\sqrt{2}} (|010\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 010|) + |100\rangle\langle 100| + \frac{1}{2} (1-p) \left[ |001\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 001| + \sqrt{2} (|001\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 001|) \right] \right\}; \quad (112)$$



На рис. 33 представлены результаты для случая  $WRr^C$  (кроме звена  $A-B$ , для которого параметры постоянны:  $c_2(A,B) = 3.43$ ,  $N(A,B) = \frac{\sqrt{17}-1}{12}$ ). Видно, что как и следовало ожидать, поведение большинства кривых качественно подобно случаю  $СКW^C$ . Примечательным исключением является деполяризация  $C$  в паре  $A-C$  (рис. 33b), в которой  $c_2$  меняет знак при  $p = \frac{1}{2}$ . При  $p < \frac{1}{2}$  причинность сохраняет свое исходное направление  $A \rightarrow C$ , при  $p > \frac{1}{2}$  направление обращено. Это объясняется тем, что в отличие от  $СКW^C$ , здесь  $S(A) < 1$  и необходимое для  $C \rightarrow A$  неравенство безусловных энтропий может быть достигнуто.

Теперь рассмотрим декогеренцию частицы  $A$ :

$$\rho_{WRr}^{dissA} = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} (|001\rangle\langle 001| + |001\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010|) + 2(1-p)|100\rangle\langle 100| + 2p|000\rangle\langle 000| - \sqrt{1-p} (|001\rangle\langle 100| + |010\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 001| + |100\rangle\langle 010|) \right], \quad (113)$$

$$\rho_{WRr}^{depolA} = \frac{1}{3} \left\{ (p-1) (|001\rangle\langle 100| + |010\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 001| + |100\rangle\langle 010|) + \left( 1 - \frac{p}{2} \right) \left[ \frac{1}{2} (|001\rangle\langle 001| + |001\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010|) + 2|100\rangle\langle 100| \right] + p \left[ |000\rangle\langle 000| + \frac{1}{4} (|101\rangle\langle 101| + |101\rangle\langle 110| + |110\rangle\langle 101| + |110\rangle\langle 110|) \right] \right\}, \quad (114)$$

$$\rho_{WRr}^{dephA} = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} (|001\rangle\langle 001| + |001\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010|) + 4|100\rangle\langle 100| - (1-p) (|001\rangle\langle 100| + |010\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 001| + |100\rangle\langle 010|) \right]. \quad (115)$$

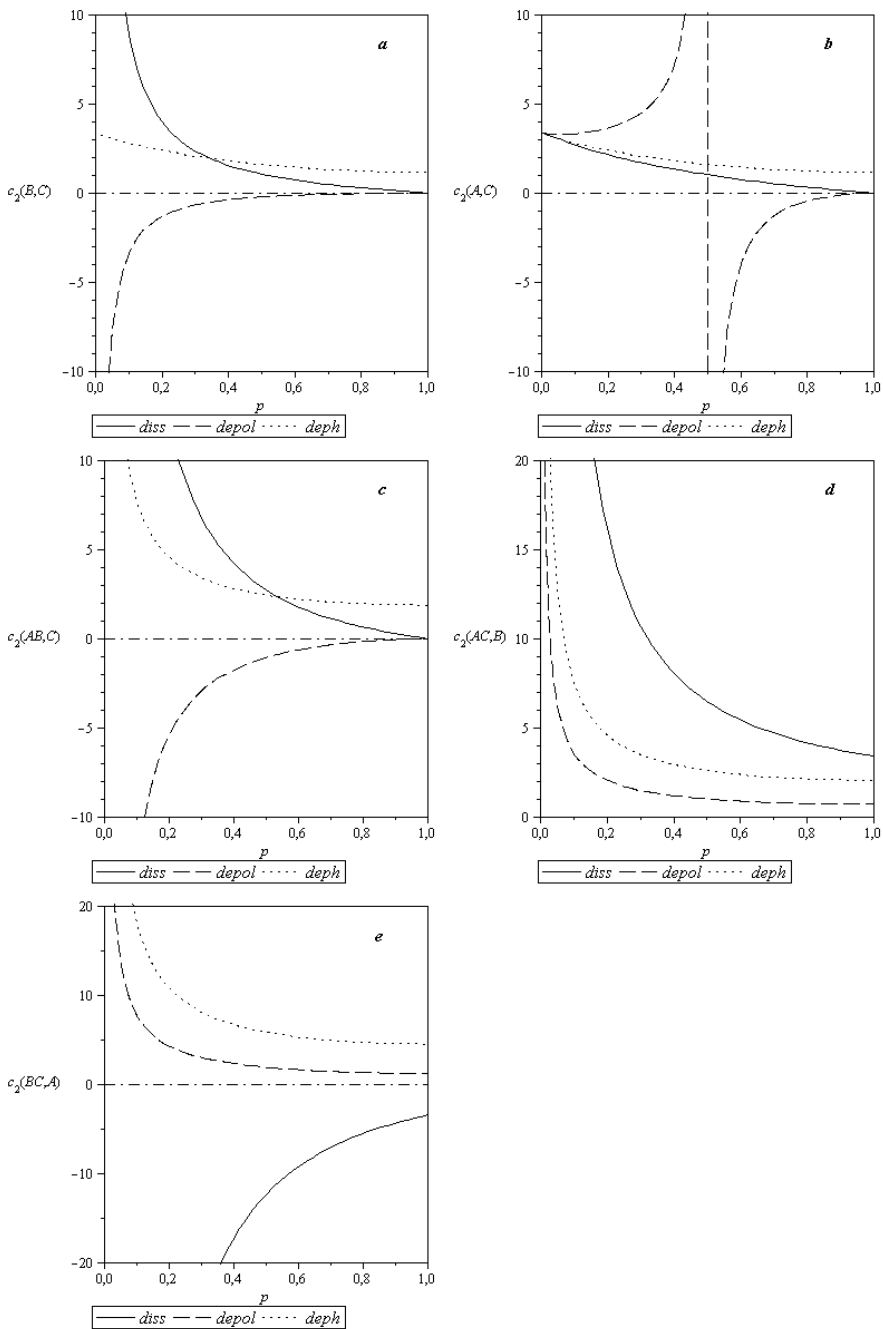
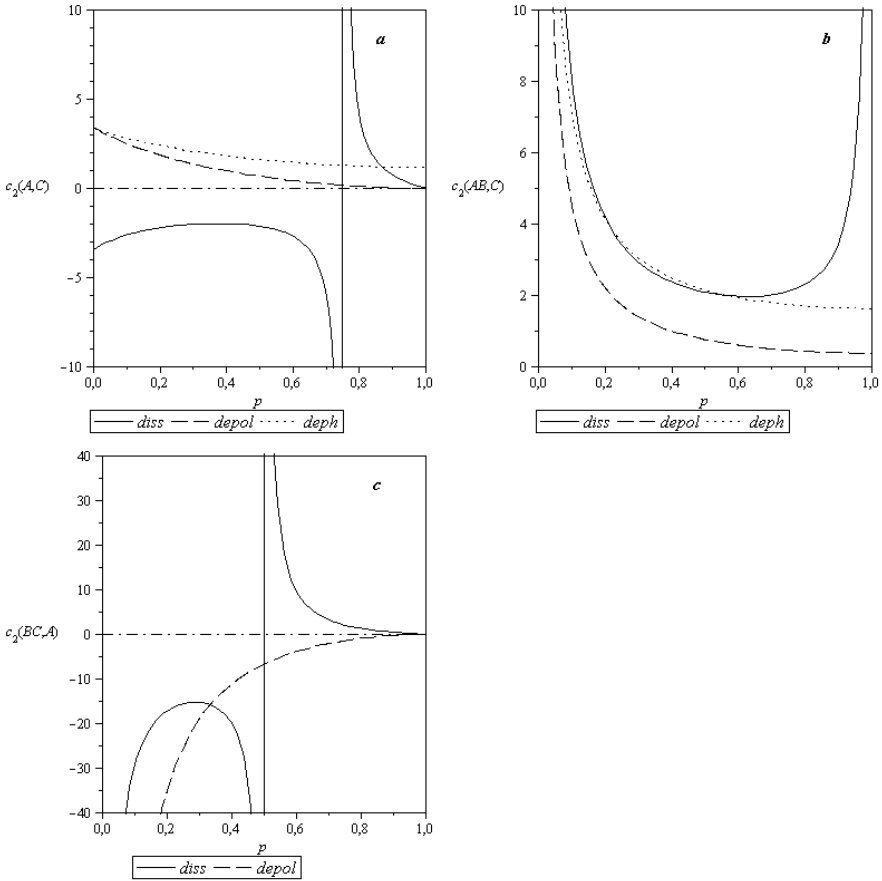


Рис. 33. Причинность в WRI-состоянии при декогеренции кубита  $C$ .

Результаты вычислений представлены на рис. 34 (кроме звена  $B-C$ , для которого параметры постоянны:  $c_2(B,C) \rightarrow \pm\infty$ ,  $N(B,C) = \frac{\sqrt{5}-2}{6}$ ; звено  $AB-C$  эквивалентно звену  $AC-B$ ). Видно, что набор причинностей  $WRr^A$  заметно отличается от такового в  $СКW^A$  (рис. 30).



**Рис. 34.** Причинность в  $WRr$ -состоянии при декогеренции кубита  $A$ .

При диссипации  $c_2(A,C)$  меняет знак при  $p = \frac{3}{4}$ , (рис. 34a), т.е. исходная парная причинность в  $WRr$ -состоянии «крепче», чем в  $СКW$ -состоянии.  $\min c_2(A,C) = 2.12$  глубже и наблюдается теперь при  $p = 0.377$ . В отличие от диссипированного  $СКW^A$ -состояния,  $c_2(A,BC)$  меняет знак при  $p = \frac{1}{2}$  (рис. 34c). При меньших  $p$  направление причинной связи  $A \rightarrow BC$ , при больших  $p$

$A \leftarrow BC$ . Минимум  $c_2(A, BC) = 15.2$ , соответствующий  $A \rightarrow BC$  наблюдается при  $p = 0.288$ . Кривая  $c_2(AB, C)$  на рис. 34b подобна кривой на рис. 30b, хотя  $\min c_2(AC, B) = 1.97$  при  $p = 0.627$  не равен  $\min c_2(A, C)$ , но их положения по-прежнему удовлетворяют соотношению:

$$p(\min c_2(AC, B)) = 1 - p(|c_2(A, C)| = \infty) + p(\min c_2(A, C)).$$

При деполяризации и дефазировании в разбиении  $AB - C$  (рис. 34b) причинность лишь слегка количественно отличается от случая СКW<sup>A</sup>:  $c_2$  меньше, очевидно, за исходно большей асимметрии WRr-состояния. Но в разбиении  $A - BC$  (рис. 34c) последствие сильнее выраженной асимметрии более драматично: при деполяризации имеется конечная и усиливающаяся с ростом  $p$  причинность  $A \rightarrow BC$  (отсутствующая в СКW<sup>A</sup>).

Суммируя все результаты, можно заключить, что при диссипации однокубитной подсистемы она всегда становится следствием. При деполяризации и дефазировании однокубитной подсистемы она может становиться только причиной (кроме  $A - C$  в СКW<sup>C</sup>, где  $S(A) = 1 = \max$ ). Направленность причинности (если она есть) при дефазировании совпадает с таковой при деполяризации (по крайней мере, для малых  $p$  в случаях обращения направленности при деполяризации). При этом почти всегда дефазирование индуцирует более слабую причинность, чем деполяризация.

На рис. 35 и 36 показаны негативности, соответствующие причинностям на рис. 33 и 34.

Точно так же как в случае СКW, в диссипированном WRr-состоянии (рис. 35b and 36a)  $N^{dissC} > N^{dissA}$ . Диссипация  $A$  ведет к обращению исходной причинности (рис. 34a); диссипация  $C$  усиливает исходную причинность (рис. 33b):  $|c_2(A, dissC)| < |c_2(dissA, C)|$ . Мы вновь убеждаемся, что диссипация, усиливающая исходную причинность, разрушает запутанность в меньшей степени, чем диссипация, обращающая причинность.

В деполяризованном WRr-состоянии, как и в случае СКW (рис. 35b and 36a)  $N^{depolC} < N^{depolA}$ . Деполяризация  $A$  тоже ведет к резкому усилению исходной причинности (рис. 34a); а деполяризация  $C$  меняет ее знак – в WRr-состоянии влияние деполяризации исходного следствия проявляется ярче (рис. 33b),  $|c_2(A, depolC)| > |c_2(depolA, C)|$ . Деполяризация, усиливающая исходную причинность, разрушает запутанность в меньшей степени, чем деполяризация, обращающая ее.

Вновь заключения совпадают. Мы получаем все тот же вывод: для сохранения запутанности не следует «гладить систему против шерсти».

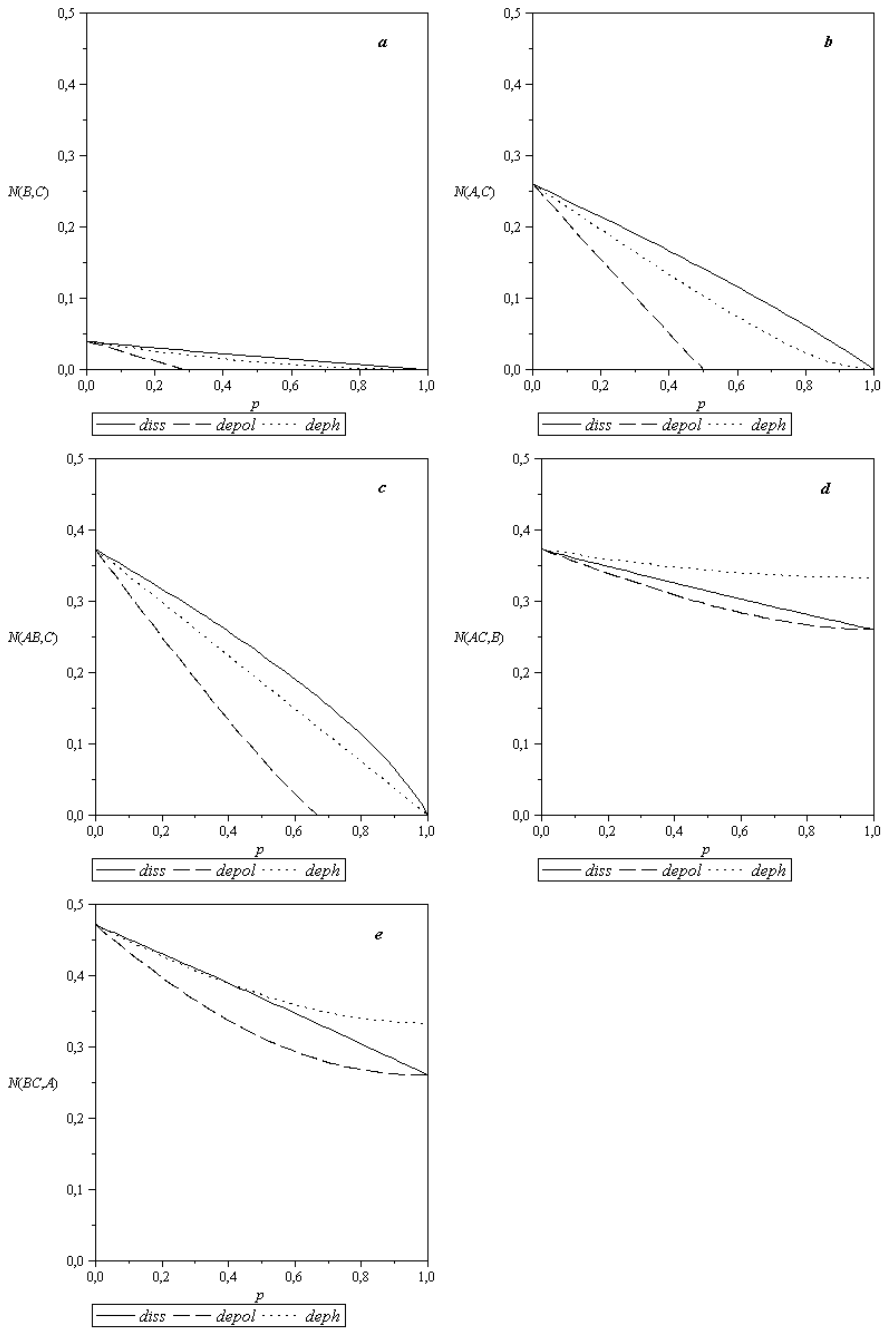
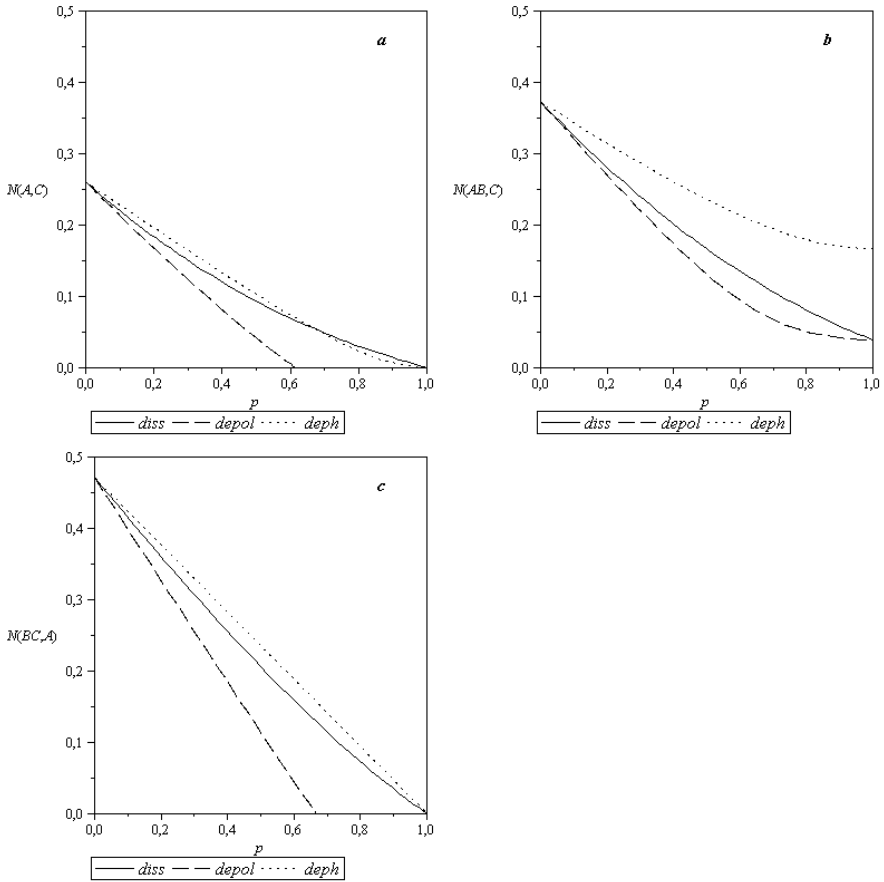


Рис. 35. Негативность в WR-состоянии при декогеренции кубита  $C$ .



**Рис. 36.** Негативность в WRг-состоянии при декогеренции кубита  $A$ .

И снова из сопоставления четырех вышеприведенных неравенства для  $N$  и  $c_2$ , мы убеждаемся, что имеем еще один пример того, что более сильная запутанность соответствует более сильной причинности.

Наконец, рассмотрев декогеренцию в разбиении  $(AC-B)$ , где декогерированный кубит находится в подсистеме  $AC$  (кривые на рис. 35с and 36b), мы снова получаем, что при любом из трех видов декогеренции при любом фиксированном  $p$ :  $N^{\text{decoh}C} > N^{\text{drcoh}A}$ . Вывод подтвержден: декогеренция внутреннего следствия подсистемы разрушает запутанность всей системы в меньшей степени, чем декогеренция внутренней причины.

## Глава 5.

# Запутанность и причинность при взаимодействии двухуровневого атома с электромагнитным полем

### 5.1. Модель взаимодействия

Еще одна система, которую мы рассмотрим с точки зрения квантового причинного анализа (также частично рассматривается в [67]), представляет собой двухуровневый атом, взаимодействующий с резонансной модой электромагнитного поля (частота поля совпадает с частотой перехода атома из основного состояния в возбужденное). В качестве модели, описывающей подобное взаимодействие, будем использовать модель Джейнса-Каммингса [68]. Она интересна тем, что, с одной стороны, сочетает в себе простоту и возможность получения аналитических решений, а с другой стороны, обладает высокой эффективностью при описании реальных процессов, происходящих, например, в одноатомных лазерах [69].

Таким образом, мы имеем дело с двусоставной системой, одна подсистема которой является кубитом (атом может находиться в основном состоянии  $|g\rangle_a$  и возбужденном состоянии  $|e\rangle_a$ ), а другая подсистема в общем случае является бесконечно-мерной (мода поля может находиться в различных энергетических состояниях  $|0\rangle_f, |1\rangle_f, |2\rangle_f$  и т.д.). Как мы видим, данная система обладает явной асимметрией, так как разным подсистемам соответствуют разные физические объекты и соответствующие им математические описания. Именно поэтому использование причинного анализа в данном случае наиболее интересно и актуально.

Согласно модели Джейнса-Каммингса взаимодействие между двухуровневым атомом и электромагнитным полем осуществляется согласно следующему гамильтониану [69]:

$$H = \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_z \otimes I_f + \hbar \omega I_a \otimes a_f^+ a_f + \hbar g (|e\rangle\langle g|_a \otimes a_f + |g\rangle\langle e|_a \otimes a_f^+), \quad (116)$$

где  $\omega$  – частота перехода атома между основным состоянием  $|g\rangle_a$  и возбужденным состоянием  $|e\rangle_a$ ,  $\sigma_z$  – z-матрица Паули,  $I_a$  и  $I_f$  – единичные матрицы размерности  $2 \times 2$  и  $\infty \times \infty$ ,  $a_f^+$  и  $a_f$  – стандартные операторы рождения и уничтожения фотона,  $g$  – дипольный матричный элемент, определяющий частоту Раби.

Смысл Гамильтониана (116) довольно прозрачен: первые два слагаемых соответствуют собственной эволюции атома и поля соответственно и представляют собой диагональные матрицы; последнее слагаемое  $V = \hbar g (|e\rangle\langle g|_a a_f + |g\rangle\langle e|_a a_f^+)$  содержит лишь недиагональные элементы и описывает взаимодействие между атомом и полем. Как мы видим, атом может переходить из основного состояния в возбужденное, поглощая фотон из поля, а также переходить из возбужденного состояния в основное, излучая фотон в поле.

В работе [70] рассматривается вопрос о влиянии температуры на запутанность между атомом и полем при взаимодействии атома в чистом возбужденном состоянии с полем в термальном смешанном состоянии. Авторы [70], используя метод проекций, чтобы перейти от исходной системы размерности  $2 \times \infty$  к двухкубитным системам размерности  $2 \times 2$ , получают, что запутанность между атомом и полем должна присутствовать при сколь угодно высоких температурах и находят нижнюю оценку данной запутанности. Мы не будем использовать метод проекций и рассмотрим непосредственное аналитическое решение соответствующего уравнения фон Неймана, что позволяет изучить эволюцию произвольного начального состояния.

Эволюция смешанной системы при отсутствии возмущающего влияния внешних факторов описывается уравнением фон Неймана

$$i\hbar \frac{\partial \rho_{af}(t)}{\partial t} = [H, \rho_{af}(t)], \quad (117)$$

где  $\rho_{af}(t)$  – общая матрица плотности атома и поля, квадратные скобки соответствуют коммутатору. Гамильтониан (116) не зависит от времени, следовательно, решение уравнения (117) принимает простой вид

$$\rho_{af}(t) = e^{-iHt/\hbar} \rho_{af}^0 e^{iHt/\hbar}, \quad (118)$$

где  $\rho_{af}^0 = \rho_{af}(0)$  — начальное состояние системы.

Далее, для упрощения положим константы  $\hbar$  и  $g$  равными единице. Кроме того, из-за диагональности первых двух слагаемых гамильтониана (116) решение (118) будет зависеть только от недиагонального слагаемого  $V$  и примет вид

$$\rho_{af}(t) = e^{-iVt} \rho_{af}^0 e^{iVt}. \quad (119)$$

В качестве начальных состояний атома и поля будем рассматривать сепарабельные состояния  $\rho_{af}^0 = \rho_a^0 \otimes \rho_f^0$ , где  $\rho_a^0$  и  $\rho_f^0$  — начальные состояния атома и поля соответственно.

В качестве начального состояния поля рассмотрим термальное смешанное состояние  $\rho_f^0 = \sum_{i=0}^{\infty} P_i |i\rangle\langle i|_f$ , где вероятности  $P_i$  — определяются распределением Бозе-Эйнштейна

$$P_i = \frac{1}{1 + \langle n \rangle} \left( \frac{\langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle} \right)^i, \quad (120)$$

в котором среднее число фотонов  $\langle n \rangle = (e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)^{-1}$ .

Рассмотрим проблему, связанную с бесконечной размерностью матрицы поля. В связи с тем, что (120) представляет собой экспоненциально убывающий ряд, мы можем ограничиться рассмотрением первых  $N_{\max}$  членов. Величину

итоговой ошибки можно оценить как  $\alpha = 1 - \left( \sum_{i=0}^{N_{\max}-1} P_i n \right) / \langle n \rangle$ . Она соответствует



отношению энергии, запасенной в отброшенных степенях свободы поля, к общей энергии поля. В последующих вычислениях мы положили  $N_{\max}$  достаточно большим, что бы обеспечивает точность  $\alpha < 1\%$  при максимальном рассматриваемом  $\langle n \rangle = 80$ .

В качестве начального состояния атома мы рассмотрим два варианта: атом в чистом возбужденном состоянии и атом в чистом основном состоянии. Таким образом, матрицы начальных состояний принимают вид:

$$\rho_{af}^{0(e)} = |e\rangle\langle e|_a \otimes \rho_f^0, \quad (121)$$

$$\rho_{af}^{0(g)} = |g\rangle\langle g|_a \otimes \rho_f^0, \quad (122)$$

Подставляя выражения (121) и (122) в (119), мы получаем различные варианты эволюции системы.

В качестве исследуемых характеристик рассмотрим следующие величины:

- 1) негативность  $N$  как меру запутанности;
- 2) информацию  $I = S(a) + S(f) - S(af)$  как меру полных корреляций в системе где  $S(a)$ ,  $S(f)$  и  $S(af)$  – энтропии атома, поля и всей системы в целом;
- 3) функции независимости  $i_{af} = (S(af) - S(f)) / S(a)$  и  $i_{fa} = (S(af) - S(a)) / S(f)$  как меры односторонних корреляций,
- 4) безразмерную скорость необратимого потока информации (ход времени)  $c_2(f, a) = (1 - i_{af})(1 - i_{fa}) / (i_{fa} - i_{af})$  как меру асимметрии системы (положительные значения  $c_2^{fa}$  соответствуют направлению причинной связи от поля к атому).

## 5.2. Результаты вычислений

### • Взаимодействие возбужденного атома с термальным полем

Рассмотрим решение (119) при начальном условии (121) для различных значений  $\langle n \rangle$ , определяющих в температуру поля. При нулевой температуре матрице плотности системы будет соответствовать вектор  $|\psi_{af}^{(e)}(t)\rangle = \sin(t) |g, 1\rangle_{af} - i \cos(t) |e, 0\rangle_{af}$ . Таким образом, мы имеем дело с чистым запутанным состоянием, величина запутанности которого периодически меняется от нуля до максимального значения. Так как состояние чистое, то причинность в данном случае отсутствует ( $|c_2(f, a)| \rightarrow \infty$ ).

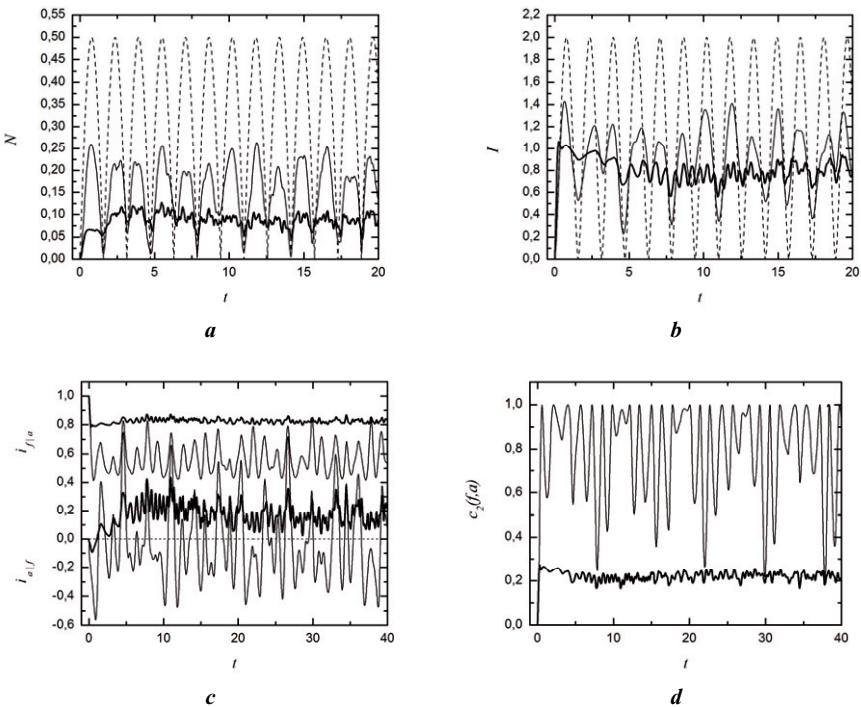
Поведение характеристик системы при повышении температуры поля представлено на рис. 37. Как мы видим, негативность и информация ведут себя схожим образом: при нулевой температуре они осциллируют с одинаковой частотой, а с ростом  $\langle n \rangle$  их максимальные достигаемые значения спадают, однако уровень квантовых и полных корреляций уже никогда не возвращается к нулевому значению.

Поведение функций независимости, представленное на рис. 37с, свидетельствует о переходе корреляций в «классическую» область с ростом

температуры (обе функции независимости при  $\langle n \rangle = 10$  практически всегда положительны). Таким образом, мы вновь сталкиваемся с ситуацией, когда система является классически-коррелированной с точки зрения энтропийных параметров, но в тоже время остается запутанной.  $i_{f|a} > i_{a|f}$ , таким образом, поле выступает источником информации (причиной), а атом – стоком информации (следствием).

Наиболее интересно поведение силы причинной связи, характеризуемой величиной  $c_2(f,a)$  (рис. 37d). При  $\langle n \rangle = 1$  значение  $c_2(f,a)$  ограничено характерным значением  $c_2(f,a) = 1$ . С повышением температуры происходит усиление причинной связи, что можно объяснить увеличением начальной энтропии поля (с ее ростом усиливается асимметрия между подсистемами).

Также интересно, что все характеристики системы с ростом температуры (это уже хорошо заметно при  $\langle n \rangle = 10$ ) выходят на некоторые средние значения, около которых продолжают колебаться далее. Интенсивности подобных флуктуаций уменьшаются с ростом температуры.



**Рис. 37.** Зависимость параметров системы от времени для начального состояния (121) для  $\langle n \rangle = 0$  (пунктирные кривые),  $\langle n \rangle = 1$  (тонкие кривые) и  $\langle n \rangle = 10$  (жирные кривые): а) негативность; б) информация; в) функции независимости; д) скорость необратимого потока информации.

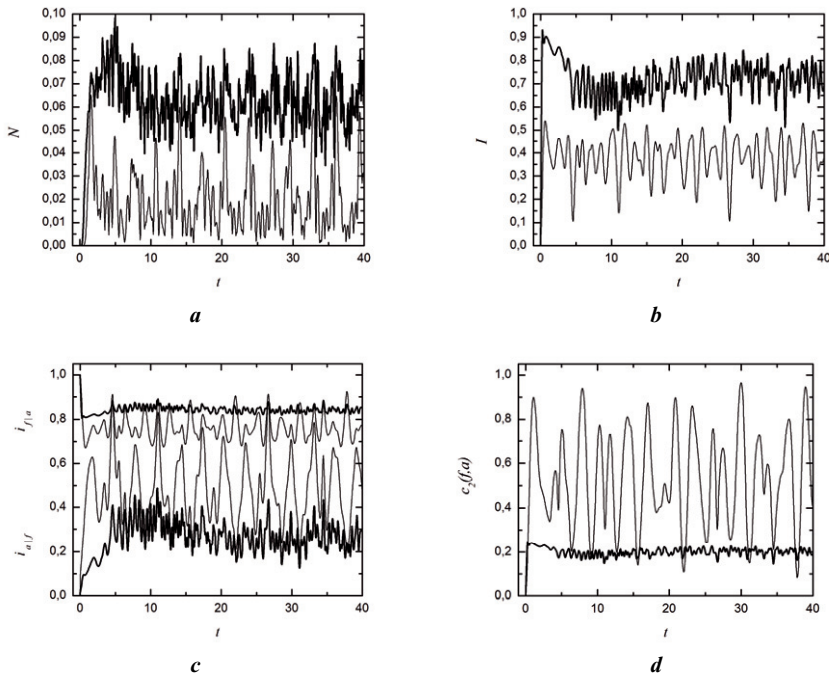
• **Взаимодействие невозбужденного атома с термальным полем.**

Далее рассмотрим развитие начального состояния (122) для различных значений  $\langle n \rangle$ . При нулевой температуре матрице плотности (119) соответствует статичный сепарабельный вектор  $|\psi_{af}^{(g)}(t)\rangle = |g, 0\rangle_{af}$ . Однако при повышении температуры поля начинает происходить энергообмен между атомом в основном состоянии и полем в состояниях отличных от  $|0\rangle_f$ , что приводит к возникновению запутанности.

Поведение различных характеристик системы при  $\langle n \rangle = 1$  и  $\langle n \rangle = 10$  представлено на рис. 38. Как мы видим, повышение температуры способствует усилению как квантовых, так и полных корреляций в системе.

Обе функции независимости всегда положительны (рис. 38с), что свидетельствует о классичности корреляций с точки зрения энтропийных характеристик.

Причинность (рис. 38d) по-прежнему усиливается с ростом температуры, а модуль величины  $c_2(f, a)$  лежит в характерном диапазоне (0,1) при  $\langle n \rangle \geq 1$ . Как и в предыдущем случае, поле является источником информации (причиной), а атом – стоком информации (следствием).

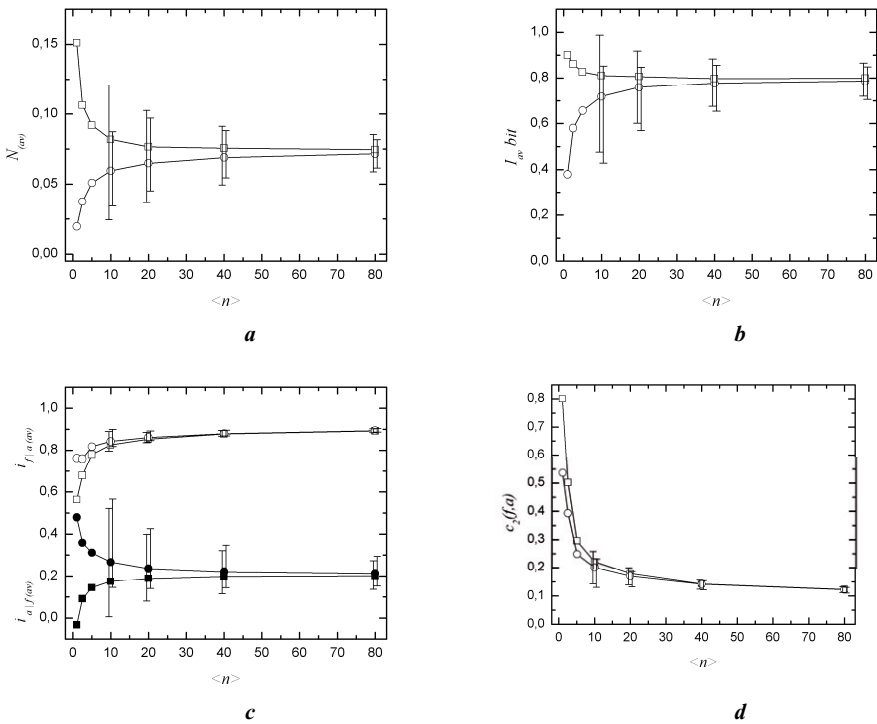


**Рис. 38.** Зависимость параметров системы от времени для начального состояния (122) для  $\langle n \rangle = 1$  (тонкие кривые) и  $\langle n \rangle = 10$  (жирные кривые): а) негативность; б) информация; в) функции независимости; д) скорость необратимого потока информации.

• **Усреднение по времени.**

Из рис. 37 и 38 можно видеть, что с повышением температуры поля все исследуемые величины выходят на некоторый средний уровень, около которого продолжают колебаться в дальнейшем. Попробуем выявить зависимости средних по времени для различных характеристик от  $\langle n \rangle$ . Для этого рассмотрим временной промежуток  $150 \leq t \leq 400$  и посчитаем средние по времени с шагом  $\Delta t = 0.5$ .

Результаты вычислений представлены на рис. 39. Мы видим, что для всех характеристик две кривые всегда стремятся сойтись к одной горизонтальной асимптоте. Данное явление свидетельствует о том, что с ростом температуры поля влияние начального состояния атома на средние характеристики системы уменьшается.



**Рис. 39.** Зависимость усредненных по времени параметров системы от  $\langle n \rangle$  для различных начальных состояний системы □ – (121), ○ – (122): а) негативность; б) информация; в) функции независимости; д) скорость необратимого потока информации. Вертикальные риски соответствуют максимальным и минимальным значениям параметров на исследуемом временном промежутке.

Наиболее интересно поведение запутанности, представленное на рис. 39а. Можно было ожидать, что с ростом  $\langle n \rangle$  запутанность для начального состояния (121) будет стремиться к нулевому значению, однако это не так. Кривые для начальных состояний (121) и (122) стремятся сойтись на уровне  $N \approx 0.7$ , что составляет порядка 14% от максимального значения запутанности. Таким образом, температура поля не разрушает квантовые корреляции полностью, а в случае начального состояния (122) является даже конструктивным фактором для создания запутанности.

Аналогичным образом ведет себя информация, представленная на рис. 39б. Средний асимптотический уровень составляет  $I \approx 0.8$ , что соответствует 40% от максимального значения.

Функции независимости стремятся к положительным значениям, поле всегда выступает причиной по отношению к атому.

### 5.3. Обсуждение

Мы рассмотрели взаимодействие двухуровневого атома с резонансной модой электромагнитного, описываемое моделью Джейнса-Каммингаса. В первую очередь отметим отличительные особенности данной системы от рассмотренных в предыдущих главах случаев. Выражение для исследуемой матрицы плотности (119) было получено в результате решения соответствующего уравнения фон Неймана (117). Таким образом, мы имеем дело с совокупностью векторов состояния (образующих смесь), каждый из которых является решением уравнения Шрёдингера. Как было показано ранее, причинность в любом чистом состоянии отсутствует, однако как только мы «компоуем» из них матрицу плотности, причинность принимает конкретные значения. Другими словами, нами было получено, что в *гамильтоновых* системах причинность может существовать и меняться со временем (до этого нами рассматривались лишь негамильтоновы системы, так как смешанность общего состояния не была постоянной).

Данное явление можно объяснить явной асимметрией рассматриваемой системы: атом может принимать всего лишь два состояния, в то время как поле могло в общем случае находиться в бесконечном числе состояний. Другими словами, двухуровневый атом может хранить в себе максимум 1 *бит* информации, в то время как максимальная энтропия поля ничем не ограничена. В конечном итоге, данная особенность системы и приводит к тому, что при достаточно высоких температурах поле всегда является причиной (источником информации), а атом следствием (стоком информации).

На этом фоне естественно ожидать, что при высоких температурах решающая роль во влиянии на средние характеристики системы переходит именно к полю, и то, с какого именно чистого состояния стартовал атом, становится безразлично.

Наиболее важным и интересным становится тот факт, что запутанность между атомом и полем при повышении температуры стремится к некоторому относительно высокому ( $\approx 14\%$  от максимального уровня) асимптотическому значению. Таким образом, температура не разрушает квантовые корреляции

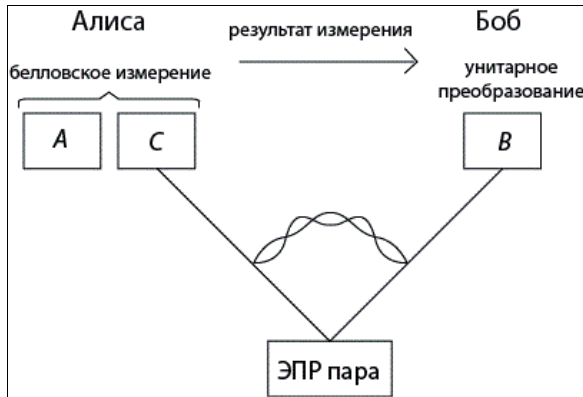
полностью, а в случае с атомом в основном или термальном состоянии может выступать в роли конструктивного фактора в создании запутанности, что контрастирует с распространенным представлением о воздействии температуры.

## Глава 6. Телепортация

### 6.1. Протокол трехкубитной телепортации

Квантовая телепортация представляет собой, пожалуй, одно из самых интригующих приложений квантовой теории информации. В ходе этого процесса происходит разрушение исходного квантового состояния у отправителя (которого, как это принято, называют Алисой) и его появление у получателя (Боба). Наиболее занимательно, что явление квантовой телепортации элегантно описывается с помощью использования сигналов, распространяющихся в обратном времени [4]. Данное обстоятельство делает квантовую телепортацию особенно интересной с точки зрения использования причинного анализа.

Итак, рассмотрим общий принцип трехкубитной телепортации, схематически изображенный на рис. 40. Для осуществления данного процесса, прежде всего, необходимо, чтобы обе стороны (Алиса и Боб) получили по одной частице из некоторого определенного максимально запутанного состояния. Пусть это будет белловское состояние  $|\Psi^-\rangle_{CB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{CB} - |10\rangle_{CB})$ , причем Алисе достается частица  $C$ , а Бобу – частица  $B$ .



**Рис. 40.** Принципиальная схема протокола квантовой телепортации: Алиса телепортирует состояние частицы  $A$  на частицу  $B$ .

Алиса имеет кубит  $A$  в некотором состоянии (которое может быть неизвестно ей)  $|\psi\rangle_A = \alpha|0\rangle_A + \beta|1\rangle_A$ , и именно это состояние в итоге должно оказаться у Боба. Далее Алиса производит измерения над своими частицами  $A$  и  $C$  в белловском базисе и получает с равными вероятностями один из четырех результатов:

$$|\Psi^-\rangle_{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{AC} - |10\rangle_{AC}), \quad |\Psi^+\rangle_{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{AC} + |10\rangle_{AC}),$$

$|\Phi^-\rangle_{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{AC} - |11\rangle_{AC})$  или  $|\Phi^+\rangle_{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{AC} + |11\rangle_{AC})$ . Затем Алиса

сообщает по классическому каналу связи свой результат Бобу, и он производит над своей частицей  $B$  определенное (зависящее от результатов Алисы) унитарное преобразование, получая у себя состояние  $|\psi\rangle_B$ . На этом протокол квантовой телепортации считается завершенным.

Для описания телепортации можно воспользоваться двумя подходами: стандартным формализмом тензорного произведения и формализмом сигналов в обратном времени. Чтобы выявить разницу между этими подходами мы несколько ограничим стандартную схему телепортации.

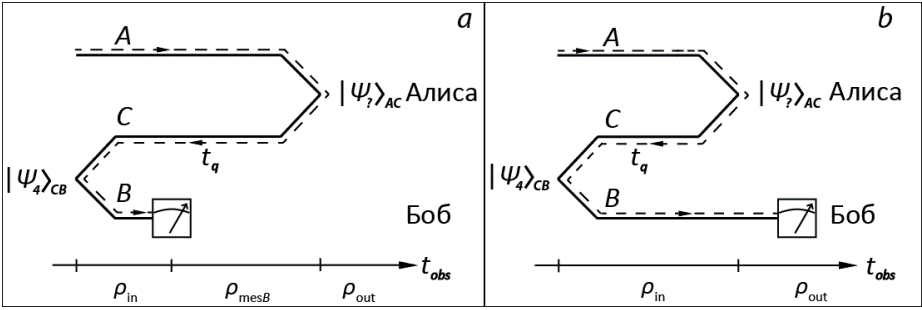
Прежде всего, опустим коммуникацию по классическому каналу, т.к. нас интересует именно передача квантовой информации. Унитарное преобразование Боба мы заменим простым измерением частицы  $B$  в стандартном базисе  $(|0\rangle, |1\rangle)$ . Также договоримся, что кубит  $A$  будет находиться в одном из двух состояний: либо чистом состоянии  $|0\rangle$ , либо в смешанном состоянии  $\frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$ , причем под смешанным состоянием мы будем понимать именно равновесную *классическую* смесь состояний  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ . Подобную смесь можно получить, например, путем применения или неприменения (основываясь на результате любого классического случайного процесса) инвертирующего преобразования  $X = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$  над состоянием  $|0\rangle$ .

Кроме того, переобозначим стандартные белловские состояния: пусть  $|\Phi^+\rangle \equiv |\Psi_1\rangle$ ,  $|\Phi^-\rangle \equiv |\Psi_2\rangle$ ,  $|\Psi^+\rangle \equiv |\Psi_3\rangle$ , а  $|\Psi^-\rangle \equiv |\Psi_4\rangle$ . В качестве исходного запутанного состояния договоримся использовать  $|\Psi_4\rangle_{CB}$ .

Мы будем рассматривать две ключевых схемы эксперимента (рис. 41а,б). Эти схемы отличаются тем, что в схеме  $a$  Боб производит измерение над своей частицей сразу после рождения ЭПР пары, а в схеме  $b$  – Боб производит свое измерение уже после измерения Алисы. Для каждой из схем мы будем выделять еще два случая: в первом из них (будем использовать обозначение  $I$ ), как мы и договаривались, Алиса будет подавать на вход чистое состояние  $|0\rangle$ , а во втором случае (будем использовать обозначение  $II$ ) Алиса будет подавать классическую смесь  $\frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$ . Итого получаем четыре варианта эксперимента:  $aI$ ,  $aII$ ,  $bI$  и  $bII$ .

Далее мы рассмотрим каждый из этих вариантов с точки зрения тензорного произведения и обратновременного формализма.





**Рис. 41.** Исследуемые схемы квантовой телепортации: а) Боб производит измерение над своей частицей до измерения Алисы; б) Боб производит измерение над своей частицей после измерения Алисы. Для каждого варианта представлена эволюция матриц плотности с точки зрения наблюдателя ( $t_{obs}$ ). Пунктиром показано направление собственного времени кубита ( $t_q$ ), используемого в формализме обратного времени.

## 6.2. Трактовка тензорного произведения

Рассмотрим схемы *aI*, *aII*, *bI* и *bII* с точки зрения стандартного квантовомеханического формализма. Другими словами, мы будем использовать для описания поведения системы матрицы плотности. Двигаясь последовательно, мы будем отслеживать их изменения для каждого из вариантов эксперимента. Для удобства восприятия, эволюция матриц плотности во всех схемах эксперимента также приведена на рис. 41. Мы специально используем индекс «*obs*» у шкалы времени  $t$ , чтобы подчеркнуть, что эволюция рассматривается именно с точки зрения наблюдателя.

В начальный момент времени в схемах *aI* и *bI*, в которых исходный кубит Алисы находится в чистом состоянии  $|0\rangle$ , общая матрица плотности имеет вид

$$\rho_{in}^I = |0\rangle\langle 0|_A \otimes |\Psi_4\rangle\langle \Psi_4|_{CB}, \quad (123)$$

в свою очередь в схемах *aII* и *bII*, в которых исходный кубит Алисы находится в смешанном состоянии  $\frac{1}{2}|0\rangle\langle 0|_A + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1|_A$ , начальное состояние системы имеет вид

$$\rho_{in}^{II} = \left( \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0|_A + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1|_A \right) \otimes |\Psi_4\rangle\langle \Psi_4|_{CB}. \quad (124)$$

Далее в схемах *aI* и *aII* за счет измерения Боба, запутанность между *C* и *B* разрушается, и исходные состояния (123) и (124) преобразуется в

$$\rho_{mesB}^I = |0\rangle\langle 0|_A \otimes \left( \frac{1}{2}|01\rangle\langle 01|_{CB} + \frac{1}{2}|10\rangle\langle 10|_{CB} \right) \quad (125)$$

и

$$\rho_{mesB}^{II} = \left( \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0|_A + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1|_A \right) \otimes \left( \frac{1}{2}|01\rangle\langle 01|_{CB} + \frac{1}{2}|10\rangle\langle 10|_{CB} \right) \quad (126)$$

соответственно. Боб полностью дефазировывает свою частицу, разрушая квантовые корреляции между *C* и *B*.

За измерением Боба в схемах  $aI$  и  $aII$  следует измерение Алисы – она проецирует свою пару частиц  $AC$  на базис белловских состояний и результирующие матрицы плотности принимают вид

$$\rho_{\text{out}}^I = \frac{1}{4}(|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|_{AC} + |\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|_{AC}) \otimes |1\rangle\langle 1|_B + \frac{1}{4}(|\Psi_3\rangle\langle\Psi_3|_{AC} + |\Psi_4\rangle\langle\Psi_4|_{AC}) \otimes |0\rangle\langle 0|_B \quad (127)$$

и

$$\rho_{\text{out}}^{II} = \frac{1}{8}(|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|_{AC} + |\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|_{AC} + |\Psi_3\rangle\langle\Psi_3|_{AC} + |\Psi_4\rangle\langle\Psi_4|_{AC}) \otimes (|0\rangle\langle 0|_B + |1\rangle\langle 1|_B) \quad (128)$$

в случаях  $I$  и  $II$  соответственно.

Теперь вернемся к схемам  $bI$  и  $bII$ . В них Алиса производит измерение пары частиц  $AC$  в системе, находящейся в исходных состояниях (123) и (124), а не подвергшихся дефазированию Боба (125) и (126). Несмотря на это, результирующие состояния имеют тот же вид – (127) и (128) для схем  $bI$  и  $bII$  соответственно. Последующее дефазирование Боба уже никак не влияет на получившиеся состояния системы.

Стоит отметить, что оригинальному протоколу квантовой телепортации больше соответствуют схемы  $bI$  и  $bII$ . Действительно, при переходе  $\rho_{\text{in}} \rightarrow \rho_{\text{mes}B}$  запутанность состояния  $CB$  полностью разрушается и, чтобы ни произошло далее, частица Боба  $B$  останется в прежнем состоянии. С другой стороны, согласно (127) в схеме  $aI$  Боб может предсказать, какой из двух групп ( $|\Psi_1\rangle$  и  $|\Psi_2\rangle$  или  $|\Psi_3\rangle$  и  $|\Psi_4\rangle$ ) будет соответствовать измерение Алисы. Можно сказать, что произведя измерение над частицей  $B$ , Боб определил состояние и частицы  $C$  (т.к. они составляли запутанную пару). Далее определенность частицы  $C$  снизила неопределенность белловского измерения Алисы в 2 раза. Таким образом, кажется, что в схеме  $aI$  измерение Боба повлияло на измерение Алисы. В схеме  $bI$ , отличающейся от  $aI$  лишь моментом измерения Боба, кажется, что именно измерение Алисы повлияло на состояние частицы Боба, т.к. до белловского измерения Алисы частица  $B$  находилась в неопределенном запутанном с частицей  $C$  состоянии.

В схемах  $bI$  и  $bII$ , как мы видим из выражения для конечной матрицы плотности  $\rho_{\text{out}}^{\text{rand},d}$  (128), Боб в принципе ничего не может сказать об измерениях Алисы, поэтому вопрос о причинности здесь не возникает так остро, как в двух схемах  $a$ .

Итак, мы столкнулись со случаем, когда интуитивные выводы о направлении причинности меняются в зависимости от того, когда было произведено измерение одной из подсистем. Теперь рассмотрим, что нам дает применение причинного анализа.

Согласно оригинальной трактовке квантовой телепортации передача информации (хоть и с шифрованием) от Алисы к Бобу происходит именно в момент белловского измерения Алисы. Для более подробного изучения этого процесса «сгладим» квантовое измерение Алисы с помощью параметра  $p$  (в

соответствии с плавным процессом дефазирования (84)). Отметим, что параметр  $p$  может рассматриваться как косвенная мера времени процесса декогеренции. Рассмотрим следующие состояния:

$$\rho_{ACB}^{aI} = \rho_{out}^I + (1-p)(\rho_{mesB}^I - \rho_{out}^I), \quad (129)$$

$$\rho_{ACB}^{aII} = \rho_{out}^{II} + (1-p)(\rho_{mesB}^{II} - \rho_{out}^{II}), \quad (130)$$

$$\rho_{ACB}^{bI} = \rho_{out}^I + (1-p)(\rho_{in}^I - \rho_{out}^I), \quad (131)$$

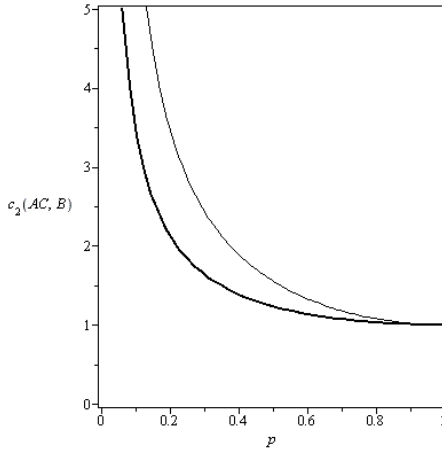
$$\rho_{ACB}^{bII} = \rho_{out}^{II} + (1-p)(\rho_{in}^{II} - \rho_{out}^{II}). \quad (132)$$

Как мы видим, каждое из этих состояний описывает Белловское измерение Алисы в соответствующей схеме. При  $p=0$  измерение еще не совершено (предизмерение), при  $p=1$  оно полностью завершено.

Прежде всего, стоит отметить, что для всех четырех матриц плотности (129)-(132) редуцированная матрица для частицы  $B$  имеет вид  $\rho_B = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$  и не зависит от  $p$ . Данное явление очевидно для случаев  $aI$  и  $aII$ , т.к. любые действия Алисы уже никак не могут повлиять на частицу  $B$ , однако в схемах  $bI$  и  $bII$  подобное поведение не столь тривиально. Можно сказать, что с точки зрения матриц плотности частица  $B$  не чувствует в какой именно момент произошла телепортация. Это замечание будет важным, когда мы будем рассматривать обратновременной формализм.

Теперь рассмотрим поведение причинности  $AC-B$  в каждой из схем телепортации. На рис. 42 Представлены графики  $c_2(AC, B)$  состояний  $\rho_{ACB}^{aI}$  и  $\rho_{ACB}^{bI}$ . При  $p=0$  в связи с тем, что  $S(A)=0$ ,  $c_2(AC, B)=c_2(C, B)=\infty$  как в случае с измеренным с  $\rho_{mesB}$  (схема  $aI$ ), так и в случае  $\rho_{in}$  (схема  $bI$ ). Далее с ростом  $p$  обе причинности усиливаются и достигают значения  $c_2^{aI}(AC, B)=c_2^{bI}(AC, B)=1$  при  $p=1$ . Стоит отметить, что в схеме с предварительным измерением Боба  $aI$  причинность усиливается более интенсивно, чем в случае отсутствия этого измерения, что полностью соответствует конструктивной роли измерения для появления причинности.

Однако самый главный результат заключается в том, что в обеих схемах причинность направлена от  $AC$  к  $B$ . Если с точки зрения схемы  $bI$  данный результат выглядит довольно логичным – направление причинности совпадает с направлением телепортации, то в схеме  $aI$  мы получаем причинность в обратном времени, т.к. состояние частицы  $B$  было зафиксировано еще до Белловского измерения Алисы.

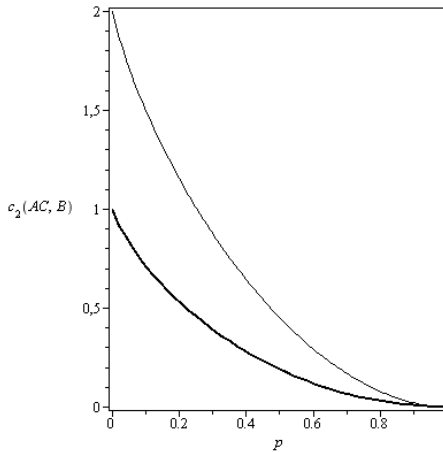


**Рис. 42.** Причинность  $c_2(AC, B)$  при белловском измерении Алисы в схемах *aI* (жирная кривая) и *bI* (тонкая кривая).

Почему же причинный анализ в случае схемы *aI* дает результаты, казалось бы, противоречащие интуиции и здравому смыслу? Для ответа на этот вопрос следует обратиться к энтропиям подсистем *AC* и *B*. В результате своего измерения Алиса получает с равными вероятностями одно из четырех состояний Белла. Все они взаимно ортогональны, поэтому энтропия *AC* после измерения максимальна и равна 2 битам ( $S(AC) = 2$ ). Энтропия же частицы Боба всегда равна одному биту ( $S(B) = 1$ ). Данное неравенство энтропий *AC* и *B* в конечном итоге и провидит к соответствующему направлению причинностей. Как мы увидим далее, данное «необычное» направление причинности может иметь под собой конкретное физическое обоснование, а пока что обратимся к схемам *aII* и *bII*.

Поведение  $c_2^{aII}(AC, B)$  и  $c_2^{bII}(AC, B)$  представлено на рис. 43. Для данных состояний при  $p = 0$  энтропия  $S(A) = 1$ , поэтому сила причинной связи в звене *AC* – *B* уже имеет конечную величину. Как и в предыдущем случае, в схеме с предварительным измерением (*aII*) причинность сильнее, чем в случае его отсутствия (*bII*):  $c_2^{aII}(AC, B) = 1 < c_2^{bII}(AC, B) = 2$ . С ростом  $p$  причинность усиливается, достигая критического значения  $c_2^{aII}(AC, B) = c_2^{bII}(AC, B) = 0$ , соответствующего отсутствию корреляций между *AC* и *B*. Также стоит отметить, что по-прежнему причинности имеет направление  $AC \rightarrow B$ .

Итак, рассмотрев привычный формализм тензорного произведения, перейдем к более экзотическому формализму сигналов в обратном времени.



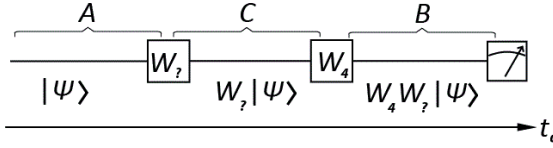
**Рис. 43.** Причинность  $c_2(AC, B)$  при белловском измерении Алисы в схемах *aII* (жирная кривая) и *bII* (тонкая кривая).

### 6.3. Обратновременная трактовка

Мы будем использовать подход, подробно разобранный в работе [4], с некоторыми упрощениями. Согласно нему, созданию и измерению двухкубитного состояния в белловском базисе соответствует действие некоторого оператора, обращающего собственное время кубита и производя над ним некоторую трансформацию, зависящую от конкретного созданного или измеренного чистого запутанного состояния. Другими словами, создание и измерение запутанного состояния можно интерпретировать как «зеркало времени» (которое не только отражает, но и модифицирует кубит). Согласно [4] каждому белловскому состоянию  $|\Psi_i\rangle$  можно поставить в соответствие оператор  $(W_i)_{a,b} = \sqrt{2}\langle b, a | \Psi_i \rangle$ , который и определяет изменение кубита после соответствующего «временного отражения». По отношению к базисным векторам  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$   $W_1$  и  $W_2$  действуют как единичный оператор, а  $W_3$  и  $W_4$  – как инвертирующий оператор (с точностью до абсолютной фазы, которая может меняться, но не может быть зарегистрирована экспериментально).

Поведение кубита согласно обратновременной трактовке показано пунктирными стрелками на рис. 41. Кубит Алисы  $|\psi\rangle$  ( $|0\rangle$  или  $|1\rangle$ ) проходя через белловское измерение, меняет свое естественное прямое направление во времени, превращается в  $W_2|\psi\rangle$  (обозначение «?» иллюстрирует тот факт, что результат измерения Алисы – случаен и заранее неизвестен) и перебрасывается на частицу C. Далее он движется в прошлое к моменту рождения запутанной пары BC, видоизменяется в  $W_4W_2|\psi\rangle$  (в данном случае трансформация строго определена, т.к. мы используем именно  $|\Psi_4\rangle$ ) и перебрасывается на частицу B,

вновь начиная двигаться вперед во времени наблюдателя. Наконец, он достигает измерительного прибора и фиксируется Бобом. Эволюция в собственном времени кубита показана на рис. 44.



**Рис. 44.** Схема эволюции кубита с точки зрения формализма обратного времени в случаях.

Как мы видим, ключевая особенность обратновременного формализма заключается в том, что согласно ему результат телепортации находится у Боба сразу после рождения запутанной пары  $BC$ . Действительно, когда бы Боб не сделал свое измерение, он всегда получит  $W_4 W_? |\psi\rangle$ . Таким образом, согласно обратновременному формализму схемы  $a$  и  $b$  полностью эквивалентны. За счет случайности  $W_?$  результат Боба тоже абсолютно случаен, однако содержит информацию об измерении Алисы, несмотря на то, что оно к моменту измерения Боба могло еще не произойти (как, в прочем, мог быть и не определен вектор  $|\psi\rangle$  в схеме  $aIII$ ). Отсутствие параметра  $p$  в выражении для матрицы плотности частицы  $B$  в стандартном формализме находит неожиданное объяснение в новом формализме.

Для изучения причинности в обратновременном формализме составим матрицу плотности, содержащую информацию сразу обо всех частицах. К имеющимся  $A$ ,  $B$  и  $C$  добавим еще подсистему  $D$ , которая соответствует результату измерения Алисы.  $D$  – это некоторый объект (частица) на котором записывается результат белловского измерения. С учетом  $D$  имеем:

$$\rho_{ACBD}^I = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 |0\rangle\langle 0|_A \otimes [W_i |0\rangle\langle 0| W_i^\dagger]_C \otimes [W_4 W_i |0\rangle\langle 0| W_i^\dagger W_4^\dagger]_B \otimes |\Psi_i\rangle\langle \Psi_i|_D \quad (133)$$

и

$$\rho_{ACBD}^{II} = \frac{1}{8} \sum_{j=\{0,1\}} \sum_{i=1}^4 |j\rangle\langle j|_A \otimes [W_i |j\rangle\langle j| W_i^\dagger]_C \otimes [W_4 W_i |j\rangle\langle j| W_i^\dagger W_4^\dagger]_B \otimes |\Psi_i\rangle\langle \Psi_i|_D \quad (134)$$

для вариантов  $I$  и  $II$  соответственно.

В результате получим:  $c_2^I(AC, B) = \infty$  и  $c_2^{II}(AC, B) = 1$  для звена  $AC - B$ , соответствующего матрицам (133) и (134). В случае обратновременного формализма под  $AC$  мы понимаем состояние частиц именно до белловского измерения, таким образом, эти значения причинности должны соответствовать значениям  $c_2(AC, B)$  при  $p=0$  из стандартного формализма. Здесь мы, казалось бы, получаем разногласия между двумя формализмами: действительно, при  $p=0$   $c_2^{bII}(AC, B) = 2$ ,  $c_2^{aII}(AC, B) = 1$  (рис. 43), в то время как  $c_2^{II}(AC, B) = 1$ , игнорируя разницу между схемами  $a$  и  $b$ . Причина того, что при  $p=0$   $c_2^{aII}(AC, B) < c_2^{bII}(AC, B)$ , кроется в неравенстве

$S_{all}(AC) = 1 > S_{bill}(AC) = 0$ . В формализме обратного времени всегда  $S(AC) = 1$ , т.к.  $A$  и  $C$  имеют конкретные, хоть и случайные, значения, поэтому обратновременной формализм соответствует схеме  $a$ . Отметим, что с точки зрения эксперимента (см. также следующую главу про квантово-томографический причинный анализ) мы никогда не сможем получить  $c_2(AC, B) = 2$ , т.к. измерение  $B$  всегда повлечет за собой увеличение  $S(AC)$  до 1. Таким образом, данное кажущееся различие между формализмами экспериментально неverifiedируется.

Величинам  $c_2^{al}(AC, B) = c_2^{bl}(AC, B) = 1$  и  $c_2^{all}(AC, B) = c_2^{bill}(AC, B) = 0$  при  $p = 1$  формализма тензорного произведения соответствуют  $c_2^I(D, B) = 1$  и  $c_2^{II}(D, B) = 0$  обратновременного формализма. Действительно,  $D$  – по определению, результат измерения Алисы, равноценный состоянию подсистемы  $AC$  при  $p = 1$  классического формализма. Таким образом, в данном случае оба формализма дают одинаковые результаты. Однако, с точки зрения формализма обратного времени результат  $c_2^I(D, B) = 1$  не вызывает удивления, т.к. в собственном временном фрейме кубита ( $t_q$ ) состояние  $D$  сформировалось до состояния  $B$ . Таким образом, использование причинного анализа позволяет выявить возможность эволюции объектов в своем собственном времени, отличающемся от течения времени наблюдателя.

Наконец, использование обратновременного формализма дает возможность получить такие величины как  $c_2^{II}(DA, C) = c_2^{II}(DA, B) = \frac{1}{2}$ .

Переписывая  $D$  как  $(AC)'$  (т.е. вспоминая, что  $D$  соответствует подсистеме  $AC$  после измерения), получаем следующий интересный результат:

$c_2^{II}((AC)'A, C) = \frac{1}{2}$ . Т.е. состояние частицы  $C$  в данный конкретный момент является следствием состояния  $A$  в тот же момент и всей подсистемы  $AC$  в будущем, после измерения. Налицо аномальное поведение причинности с точки зрения наблюдателя, и вполне логичное внутри собственного временного фрейма кубита с позиции формализма обратного времени.

Более того, сравнение величин хода времени  $c_2^I(AD, B) = c_2^I(AD, C) = 1$  (когда  $A$  находится в определенном чистом состоянии) и  $c_2^{II}(AD, B) = c_2^{II}(AD, C) = \frac{1}{2}$  (когда  $A$  находится в смешанном состоянии) показывает, что *чем случайнее будущее, тем сильнее обратновременная причинность*.

В заключение, очень важно отметить, что, несмотря на возможность существования причинности в обратном времени, квантовая телепортация не дает возможности влиять на прошлое из будущего. Во всех случаях причинности в обратном времени в причину входит результат квантового измерения Алисы –  $D$ , а он – *истинно случаен*. Другими словами, согласно

основным аксиомам квантовой механики – не существует никакой возможности повлиять на результат, получаемой Алисой (в противном случае, мы бы могли создать «машину времени», о чем в явном виде говорит причинный анализ). Однако, измеряя  $C$ , мы можем *предсказать* это истинно случайное будущее. Особенно наглядно это выражено в конечной матрице плотности (126): измеряя свой кубит, Боб получает 1 бит информации о (возможно) будущем результате измерения Алисы. С точки зрения классического формализма обратного времени, может показаться, что это Боб повлиял на измерение Алисы, однако причинный анализ совместно с формализмом обратного времени иллюстрируют, что точнее было бы воспринимать полученный Бобом результат именно как *информацию из случайного будущего*.



## Глава 7. Квантовая томография

### 7.1. Сущность томографии

В последнее время особое внимание уделяется томографическому (вероятностному) представлению квантовой механики [71-79]. Квантовая томография позволяет использовать для описания состояния неотрицательные функции распределения вероятностей – квантовые томограммы, представляющие большой интерес в связи с возможностью их экспериментального измерения [78, 79].

Рассмотрим дискретную спиновую томографию, предложенную в работе [76]. Пусть у нас имеется матрица плотности  $\rho^0$  частицы со спином  $1/2$ , которая характеризует проекцию спина на определенную ось  $Oz$ . Для произвольно выбранной оси  $Oz'$ , направленной вдоль единичного вектора с координатами  $\vec{n} = \{\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta\}$ , матрица плотности примет вид

$$\rho(\vec{n}) = U(\vec{n})\rho^0 U^\dagger(\vec{n}), \quad (135)$$

где  $U(\vec{n}) = U(\theta, \varphi)$  – унитарная матрица поворота:

$$U(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \exp(i\varphi/2) & \sin(\theta/2) \exp(i\varphi/2) \\ -\sin(\theta/2) \exp(-i\varphi/2) & \cos(\theta/2) \exp(-i\varphi/2) \end{pmatrix}. \quad (136)$$

Квантовая томограмма состояния  $\rho^0$  представляет собой совокупность двух диагональных элементов матрицы (135):

$$\tau(m, \vec{n}) = \{\rho(\vec{n})\}_{mm}, \quad m = 1, 2. \quad (137)$$

Другими словами, мы имеем дело вероятностями (зависящими от выбора оси  $\vec{n}$ ) обнаружения кубита в одном из двух состояний. Путем измерения состояния (135) при различных  $\vec{n}$  можно получить полную информацию об исходной матрице  $\rho^0$  [77] (заметим, что для этого нам потребуется целый ансамбль состояний  $\rho^0$ ).

Будучи распределением вероятностей томограмма обладает следующими свойствами неотрицательности и нормировки:

$$\mathcal{T}(m, \vec{n}) \geq 0, \quad \sum_m \mathcal{T}(m, \vec{n}) = 1. \quad (138)$$

Имея дело с распределением вероятностей дискретной случайной величины, мы можем ввести томографическую энтропию по аналогии с определением энтропии Шеннона:

$$S^t(\vec{n}) = -\sum_m \mathcal{T}(m, \vec{n}) \log_2 \mathcal{T}(m, \vec{n}). \quad (139)$$

В дальнейшем индексом  $t$  мы будем подчеркивать, что рассматриваем величины, полученные именно с помощью томограмм. Наконец, для двусоставной системы с исходной матрицей плотности  $\rho_{AB}^0$  томограмма будет иметь вид

$$\mathcal{T}(m_1, m_2, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = \{U(\vec{n}_1, \vec{n}_2)\rho_{AB}^0 U^\dagger(\vec{n}_1, \vec{n}_2)\}_{2m_1+m_2, 2m_1+m_2}, \quad m_1, m_2 = 1, 2 \quad (140)$$

где матрица  $U(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$  определяется тензорным произведением двух унитарных матриц поворота

$$U(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = U(\vec{n}_1) \otimes U(\vec{n}_2). \quad (141)$$

Другими словами, измерения над каждой подсистемой производятся в независимых базисах, характеризующихся своими единичными векторами  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$ .

## 7.2. Квантово-томографический причинный анализ

Использование аппарата квантового причинного анализа на языке томографии означает замену энтропий фон Неймана  $S_{AB}$ ,  $S_A$  и  $S_B$  в формуле для функций независимости (4) на томографические энтропии  $S'_{AB}(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ ,  $S'_A(\vec{n}_1)$  и  $S'_B(\vec{n}_2)$  соответственно. После подстановки новых функций независимости в формулу для хода времени (13) получаем томографическую причинность  $c'_2(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$  (напомним, что мы положили  $k=1$ ).

Рассмотрим ключевые отличия обычного квантового причинного анализа от квантово-томографического. Во-первых, для каждого конкретного состояния причинность  $c'_2(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$  уже является функцией от четырех параметров (каждый из векторов  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$  определяется своими углами  $\theta_1, \varphi_1$  и  $\theta_2, \varphi_2$ ). Таким образом, причинность в системе будет меняться в зависимости от того, в каком базисе мы рассматриваем имеющееся состояние, что объясняется необратимыми изменениями в квантовой системе при её измерении.

Во-вторых, томографические энтропии, будучи результатом эксперимента, удовлетворяют классическому энтропийному неравенству  $S'_{AB}(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \geq \max(S'_A(\vec{n}_1), S'_B(\vec{n}_2))$ . С точки зрения причинного анализа, это означает неотрицательность функций независимости. Отметим, что несмотря на кажущуюся «классичность» распределения томографических вероятностей, томограммы могут быть использованы для доказательства неравенства типа Белла [77].

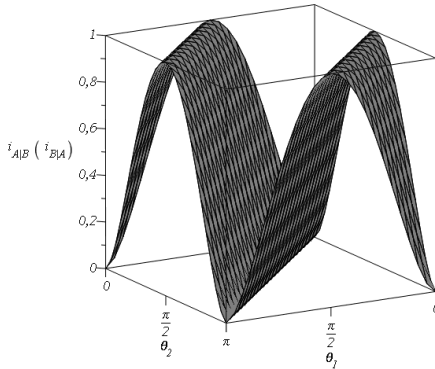
Наконец, стоит отметить связь между томографической энтропией и энтропией фон Неймана. Из определения томограммы двусоставной системы (140) следует, что томографическая энтропия будет совпадать с энтропией фон Неймана для повернутой матрицы плотности  $\rho_{AB}(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = U(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \rho_{AB}^0 U^\dagger(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ , подвергшейся процессу полного дефазирования (84). Таким образом, квантово-томографическая причинность – это причинность в двусоставной системе после дефазирования каждой из подсистем в своей системе отсчета.

## 7.3. Примеры анализа двухкубитных запутанных состояний

Рассмотрим применение томографического причинного анализа к чистому максимально запутанному состоянию  $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ , где  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  обозначают положительные и отрицательные проекции спина на выбранную ось.

Как было показано ранее – для любого чистого максимально запутанного состояния  $S_{AB} = 0$ ,  $S_A = S_B = 1$ , причинность отсутствует;  $|c_2| \rightarrow \infty$ . Данное состояние интересно тем, что матрицы плотности подсистем, будучи пропорциональными единичной матрице, инвариантны к операции поворота:  $U(\vec{n}_1)\rho_A^0 U^\dagger(\vec{n}_1) = U(\vec{n}_2)\rho_B^0 U^\dagger(\vec{n}_2) = \rho_A^0 = \rho_B^0$ . В результате получаем  $S'_A(\vec{n}_1) = S'_B(\vec{n}_2) = 1$  и  $i'_{A|B} = i'_{B|A}$ . На рис. 45 представлено поведение функций независимости в зависимости от углов  $\theta_1$  и  $\theta_2$  при фиксированных  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ . Как мы видим, условием для максимального сохранения корреляций в системе после измерения ( $i'_{A|B} = i'_{B|A} = 0$ ) является использование одинакового базиса при измерениях обеих частиц ( $\theta_1 = \theta_2$ ). Вследствие равенства томографических функций независимости, квантово-томографическая причинность отсутствует:  $|c'_2(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| \rightarrow \infty$ .

Таким образом, мы можем сделать вывод, что для чистого максимально запутанного состояния результаты квантово-томографического причинного анализа полностью согласуются с результатами обычного квантового причинного анализа.



**Рис. 45.** Томографическая функция независимости  $i'_{A|B} (i'_{B|A})$  при фиксированных углах  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  для чистого максимально запутанного состояния  $|\phi^+\rangle$ .

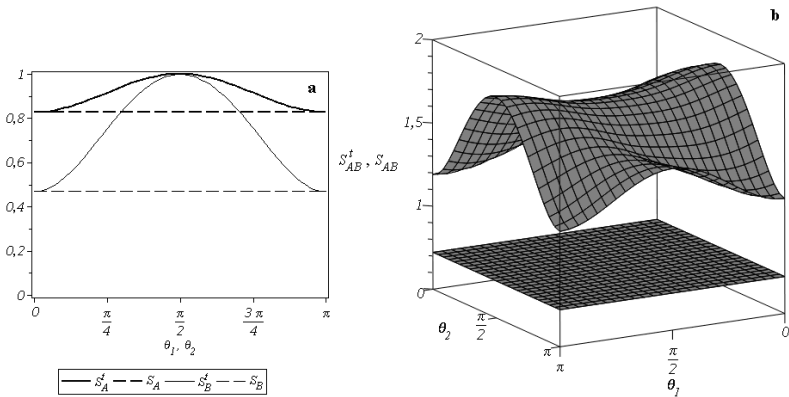
Теперь рассмотрим применение томографического причинного анализа к смешанному асимметричному «квантово-классическому» состоянию (см. глава III, пункт 3). Положим в матрице плотности (68а) следующие значения параметров:  $q = 0.2$ ,  $a^2 = 0.1$ .

Тогда энтропии фон Неймана принимают следующие значения:  $S_{AB} \approx 0.722$ ,  $S_A \approx 0.827$ ,  $S_B \approx 0.469$ . Причинность  $c_2 \approx 1.604$ , таким образом, подсистема  $A$  является причиной, а  $B$  – следствием.

После применения операции поворота, получается, что энтропии подсистем становятся зависимыми только от углов  $\theta_{1(2)}$ :  $S'_A = S'_A(\theta_1)$ ,

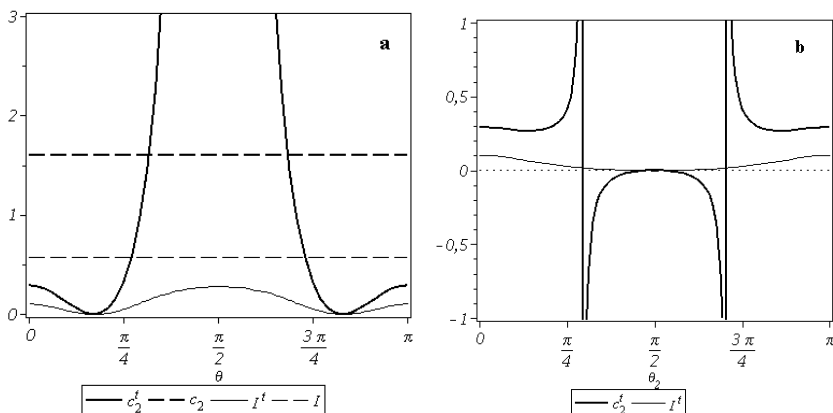
$S_B^t = S_B^t(\theta_2)$ ; в то время как энтропия всей системы зависит от всех четырех параметров:  $S_{AB}^t = S_{AB}^t(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = S_{AB}^t(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2)$ . На рис. 46а представлены графики энтропий  $S_A^t(\theta_1)$  и  $S_B^t(\theta_2)$  в сравнении с исходными фон Неймановскими энтропиями  $S_A$  и  $S_B$ . Как мы видим при  $\theta_{1(2)} = 0$  значения томографических энтропий совпадают фон Неймановскими, а при  $\theta_{1(2)} = \pi/2$  достигают своего максимального значения, равного единице.

На рис. 46б представлен трехмерный график функции  $S_{AB}^t(\theta_1, \varphi_1 = 0, \theta_2, \varphi_2 = 0)$  в сравнении с  $S_{AB}$ . Как мы видим, значение томографической энтропии для всей системы всегда выше соответствующего значения фон Неймановской энтропии.



**Рис. 46.** Сравнение томографических и фон Неймановских энтропий подсистем (а) и всей системы (б) для асимметричного «квантово-классического» состояния при фиксированных углах  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ .

Далее перейдем к анализу причинностей. Наряду с вычислением  $C_2^t(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2)$ , будем использовать величину информации  $I = S_A + S_B - S_{AB} \approx 0.574$  и томографической информации  $I^t = S_A^t + S_B^t - S_{AB}^t = I^t(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2)$  как меры общей корреляции между подсистемами.



**Рис. 47.** Сравнение обычной и квантово-томографической причинности ( $c_2$  и  $c_2'$ ) с обычной и томографической информацией ( $I$  и  $I'$ ) для асимметричного «квантово-классического» состояния при различных вариантах измерения подсистем:  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0, \theta_1 = \theta_2 = \theta$  (а);  $\varphi_1 = \varphi_2 = \theta_1 = 0$  (б).

Прежде всего, рассмотрим величину причинности в случае, когда измерения подсистем производятся под одними и теми же углами, например, при  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$  и  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ . Результаты вычислений представлены на рис. 47а. Как мы видим, в зависимости от угла  $\theta$  причинность  $c_2'$  может принимать любые положительные значения от 0 до  $+\infty$ . Таким образом, в результате эксперимента мы можем получить произвольное значение величины причинной связи, однако, её направление всегда будет совпадать с исходным. Томографическая информация, как и следовало ожидать, всегда меньше фон Неймановской информации ( $I' < I$ ) и тем меньше, чем сильнее причинная связь. Максимум информации достигается при таком способе измерения, когда томографическая причинность отсутствует ( $\theta = \pi / 2$ ).

Теперь рассмотрим случай, когда подсистемы измеряются под разными углами, например, при фиксированных  $\theta_1 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$  и меняющемся  $\theta_2$ . Результаты подобного подхода представлены на рис. 47б. Как мы видим, в данном случае имеет место обращение направления причинной связи. Таким образом, направление квантово-томографической причинности может не совпадать с исходной причинностью. С практической точки зрения, наиболее важно, что ослабление причинной связи, связанное с последующим изменением её направления сопровождается уменьшением информации. Исходному направлению причинной связи при изменении её направления соответствует более высокий уровень корреляций между подсистемами.

Итак, мы рассмотрели возможность построения квантового причинного анализа, основываясь на томографических энтропиях, вместо энтропий фон Неймана. Данный подход интересен тем, что в его основе лежит использование экспериментально получаемых данных, а не теоретических матриц плотности.

На примере смешанного асимметричного состояния получено, что в случае измерения обеих спиновых подсистем под одними и теми же углами, получаемое направление причинности всегда совпадает с исходным, несмотря на то, что величина причинной связи по результатам эксперимента может быть любой. Также получено, что информация между подсистемами при таком способе измерения максимальна в случае стремления величины причинной связи к нулю (что соответствует  $|c_2^t| \rightarrow \infty$ ).

При измерении подсистем под различными углами, можно получить направление причинности, не совпадающее с исходным. Однако подобный случай легко выявляется путем сравнения совместного поведения причинности и информации: в случае обращения направления причинности информация всегда убывает, исходному направлению причинности соответствует более высокий уровень информации. Данное явление полностью соответствует интуитивному представлению о деструктивном влиянии измерения, изменяющего исходное направление асимметрии, на общий уровень корреляции между подсистемами.

Таким образом, использование квантово-томографического причинного анализа представляется крайне полезным с точки зрения исследования исходной асимметрии квантовых состояний с неизвестными матрицами плотности. Появляющиеся в результате измерений искажения асимметрии поддаются учету.

## Глава 8. Промежуточные итоги

Итак, мы начали с формализации обычного интуитивного представления о причинности, причем до введения временного порядка – запаздывания следствия относительно причины. Это запаздывание является необходимым, но недостаточным условием классической причинности и вводится как отдельная аксиома. В квантовом мире ей соответствует аксиома сильной причинности. Но в этом мире находится место и для слабой причинности, для которой временной порядок может быть любой. Поскольку обратное время возможно только для неизвестных состояний, «телеграф в прошлое» невозможен и не возникает общеизвестных наивных классических парадоксов. Однако сдвиг времени между причиной и следствием, положительный или отрицательный, должен быть конечным. Мгновенные квантовые корреляции возможны, но они являются беспричинными. В этом наши результаты не отличаются от сложившегося в теории квантовой информации представления, но они вносят существенное уточнение – мгновенные корреляции возможны только в информационно-симметричных состояниях или, несколько огрублено – в энтропийно-симметричных. Под огрублением мы имеем ввиду, что  $\alpha \rightarrow 1$ , вообще говоря, не обязательно влечет  $\beta \rightarrow 1$ ,  $\gamma \rightarrow 1$ ,  $|c_2| \rightarrow \infty$ . Но все чистые состояния – излюбленный объект теоретиков – симметричны без всяких оговорок и, может быть поэтому представление об универсальной мгновенности квантовых корреляций стало столь распространенным.

Классический причинный анализ, имеющий уже богатую историю применения, дает две эквивалентные меры причинности. Одна из них (не употреблявшаяся на практике в классике, просто как несколько более сложная) – ход времени  $c_2$  оказалась применимой на квантовом уровне. Направление причинной связи определяется как направление необратимого потока информации, которое определяется знаком  $c_2$ ; количественная мера этой связи определяется модулем  $c_2$ : отсутствие причинности соответствует  $|c_2| \rightarrow \infty$ , соответственно степень причинной связи подсистем обратна величине  $|c_2|$ . Это формальное определение причинности справедливо при любом направлении времени.

Классический причинный анализ формализовал интуитивное понимание причинности, что, во-первых, перевело ее с качественного уровня на количественный а, во-вторых, дало возможность анализа сложных систем, где интуиция может быть бессильна. Квантовое обобщение причинного анализа показало более богатую картину возможной причинной связи подсистем, где обычный интуитивный подход еще чаще затруднителен.

Используемые в причинном анализе функции независимости позволяют характеризовать квантовую и классическую коррелированность подсистем, и их применение представляет интерес в любых квантовых системах, в том числе и тех, где причинность отсутствует. Преобладание классических или квантовых

корреляций просто определяется положительностью или отрицательностью обеих функций независимости. Несколько условно этот знак можно принять определяющим в классификации корреляций. Условность заключается в том, что в определенных так классических корреляциях может присутствовать квантовая составляющая, поэтому состояние может быть запутанным при его кажущейся по корреляциям классичности. Однако это очень важно в контексте современных экспериментов с макроскопической запутанностью, в которой, по-видимому, только такое положение возможно – корреляции «выглядят» классическими, но система запутана. Такое запутывание может быть только слабым, но его присутствие принципиально важно. Интересно, что хотя мы имели дело в этой книге только с микроскопическими системами, случай запутанных состояний с кажущейся классичностью корреляций оказался не экзотичным, а вполне рядовым. В нашем изложении мы сперва обращали на это внимание, а при переходе к и без того громоздкому анализу декогеренции трехкубитных состояний, опустили этот вопрос совсем. Полные результаты по классическим и квантовым корреляциям в этих декогерированных состояниях можно найти в статье [63]. Наконец, возможен случай квантово-классических состояний, когда функции независимости имеют разные знаки. Мы детально проанализировали этот случай на примере первооткрывателей такого состояния – авторов работы [37]. Вместе с тем квантово-классические состояния также не являются редкостью, что видно из наших примеров в книге, а также [63].

Возможности причинного анализа продемонстрированы на нескольких сериях примеров, которые мы старались располагать в порядке от простейших к наименее тривиальным. При этом, чтобы дать читателю осознать поведение функций независимости, мы начали с серии примеров, где причинность отсутствует (функции равных между собой, поэтому мы говорили о них в единственном числе). Выявлялось лишь соотношение между функцией независимости и обычными мерами запутанности и смешанности состояний. Показано, что функция независимости часто, но не всегда определяется смешанностью состояния. Но главным было показать, что в ряде случаев система может выглядеть классической в энтропийном смысле, и, тем не менее, является запутанной.

Во второй серии примеров (глава III) рассмотрены системы с конечной причинностью, начиная с совсем простых и кончая достаточно сложным случаем кубитов в неоднородном магнитном поле при различной температуре. В каждом случае квантовая мера причинности сопоставлена с классической и продемонстрировано, что последняя часто либо не имеет смысла, либо приводит к даже качественно неверному результату. Показано, каким образом распределение запутанности в трехсоставных системах ведет к парной причинной связи. Для случая кубитов в магнитном поле получены выводы о контроле направленности причинной связи неоднородностью поля, которые можно физически объяснить по результатам причинного анализа, но которые не могли быть сделаны без них. Показано, что изменение температуры не влияет на направленность причинной связи, но меняет ее величину противоположным образом в параллельных и антипараллельных полях.



Начиная с IV главы, мы уже не демонстрировали классическую меру  $\gamma$ , считая, что убедили читателя, что с классической причинностью лучше расстаться. Не можем отказать себе в удовольствии заметить, что квантовая мера  $c_2$  может использоваться без всяких затруднений и в классической области. Так же как заметить и то, что в квантовых экспериментах, в конечном счете, приходится иметь дело с классическим выходом аппаратуры, так что мера  $c_2$  вполне операциональна.

В главе IV мы исследовали важные для практики процессы декогеренции. Примеры были упорядочены согласно степени возрастания асимметрии. Вычисленные параметры причинности сравнивались со степенями запутанности. В простейшем случае результаты формального причинного анализа соответствует интуитивно ожидаемому, но уже при малом усложнении квантовой системы интуиция не срабатывает. Свойства причинности многосоставных квантовых систем оказались весьма специфичны. Таким образом, применение причинного анализа привело к нетривиальным заключениям относительно распространения квантовой информации. В том числе, получены вполне практические результаты, какие виды декогеренции более, а какие менее опасны при воздействии на причину или следствие квантовой системы или подсистемы (что может читаться на техническом языке как на вход и выход квантового канала).

В главе V на примере хорошо известной модели Джейниса-Камингса мы рассмотрели пример причинности в случае, когда одна из подсистем – высокоразмерна, более того, мы фактически рассмотрели термодинамический предел. Тем самым, сделано полшага на пути к крайне трудному (для квантовомеханической теории вообще) случаю макроскопической запутанности. Важно и то, что эта (пока наполовину) макроскопическая запутанность является высокотемпературной. Из многих результатов самый простой и, в то же время нетривиальный – состояние поля является причиной по отношению к состоянию атома при любых условиях.

В предпоследней главе мы подошли к самому выдающемуся проявлению квантовой причинности – к тому факту, что она может существовать как в прямом, так и в *обратном времени*. Замечательно, что обращенная во времени причинность не влечет общеизвестных классических парадоксов. Мы рассмотрели такую необычную причинность в связи с новейшими экспериментами по телепортации. Но, конечно, ее значение много шире, например, для интерпретации и развития прогностических экспериментов на основе макроскопической запутанности.

Наконец, в последней главе, мы показали специфику применения причинного анализа к квантовой томографии, которая является не единственным, но наиболее «лобовым» теоретическим подходом к экспериментальному измерению квантовых состояний. Поэтому сделанные выводы, например, о выборе базисов измерений, которые позволят правильно интерпретировать формально получаемые причинные соотношения, представляют ясный практический интерес.

Очевидно, эти итоги являются промежуточными. Новизна похода требовала его отработки на хорошо известных квантовых состояниях и процессах, чему и была посвящена большая часть нашей работы. В ее ходе прояснились возможности причинного анализа, в том числе и такие, которые нами не «планировались». В ходе дальнейшего развития квантового причинного анализа и его применений, несомненно, будет обнаружено много нового. На наш взгляд, самым интересным будет продвижение в макроскопическую область, особенно в контексте обмена запутанностью.

## Заключение

В этой небольшой книге мы коснулись одной из интригующих сторон квантового мира – причинности в запутанных состояниях, которые фундаментальным образом отличают квантовый мир от классического, отличают настолько, что вызвали у многих физиков желание считать саму причинность чисто классическим (а то и психологическим!) понятием. Наш путь был обратным – определить причинность формально, после чего перейти на квантовый уровень и решать конкретные задачи о запутанных состояниях было уже не так трудно. Как известно, определение не может быть «правильным» или «неправильным», оно может быть удобным или неудобным. В данном случае удобство состоит в соответствии формального результата (получаемого в результате вычислений) о классификации тех или иных подсистем или состояний как причин и следствий тем абсолютно неформальным, интуитивным оценкам которые ежедневно дает не только физик, но и любой человек явлениям повседневной жизни. Это интуитивное понимание как раз обычно «правильно», потому что без него невозможно было бы ориентироваться в мире и планировать свою жизнь. Конечно, после того как в начале 1990-х годов был предложен классический причинный анализ, надо было доказать его работоспособность. Это заняло немало лет, когда на теоретических и многочисленных экспериментальных примерах мы показывали, что в очевидных ситуациях наш формальный подход дает результат соответствующий обычному интуитивному пониманию причинности и может быть плодотворно использован в неочевидных. Все эти труды остались за рамками этой книги, чтобы не затерялась ее тема, и мы в ней ограничились лишь ссылками на достаточно обширную библиографию. Важно подчеркнуть и то, что причинный анализ дает не просто дихотомную классификацию причина-следствие, а дает количественную меру, автоматически учитывая обратные связи и в итоге полную гамму возможных переходов (именно поэтому первая классическая мера причинности обозначена  $\gamma$ ).

Квантовая механика, являясь одной из двух главных (наряду с теорией относительности) основ всей физики, потрясающе интересна тем, что на основе неизменного фундамента заложенного ее основателями уже 90 лет генерирует новые идеи и открытия и все ее предсказания абсолютно (с точностью до всех современных возможностей эксперимента) точны. Поэтому любая концепция, в том числе и причинности, может считаться фундаментальной, если она имеет место в квантовом мире. Мы старались (местами, вероятно, нудно) доказать что это так. Изложив идею квантового обобщения причинного анализа, мы рассчитали параметры причинности для большой серии запутанных состояний. Результаты сравнивались со стандартными мерами запутанности и смешанности. Показана роль асимметрии состояний и асимметрии декогеренции в способности системы к передаче квантовой информации. Это имеет очевидное приложение к тем прикладным целям, к которым стремится

сегодняшняя физика квантовой информации на трудном пути к созданию квантового компьютера.

Но все-таки главное – квантовая причинность оказалась гораздо более богатой концепцией, чем классическая. Хотя мы только в главе по телепортации явным образом воспользовались инвариантностью слабой причинности по отношению к направлению времени, в заключении хотелось бы подчеркнуть квинтэссенцию результата: слабая причинность (соответствующая только нелокальным квантовым корреляциям) разрешает наблюдение *случайного* будущего как существующей реальности. Этот результат – не предсказание, поскольку уже есть экспериментальные факты (сделанные нами ссылки не исчерпывают все выполненные экспериментальные работы). Квантовый мир оказывается настолько широк, что допускает существование сигналов в обратном времени в обход общеизвестных классических парадоксов. Поэтому исследования в этом направлении ведут вполне конструктивным путем к пониманию природы времени.

Мы будем счастливы, если эта книга побудит кого-то из читателей к критике, кого-то к развитию теории, а кого-то к постановке собственных экспериментов на этом, еще полном неожиданностей пути.

## Литература

1. Cramer J.G. Generalized absorber theory and the Einstein-Podolsky-Rosen paradox // *Phys. Rev. D*. 1980. V.22. N 2. P. 362-376.
2. Cramer J.G. The transactional interpretation of Quantum Mechanics // *Rev. Mod. Phys.* 1986. V. 58. P. 647-688.
3. Elitzur A.S., Dolev S Is there more to T? // *The Nature of Time: Geometry, Physics and Perception*. Edited by R. Buccery, M. Saniga and W.M. Stuckey, Kluwer Academic Publishers, 2003, P. 297-306.
4. Laforest M., Baugh J., Laflamme R. Time-reversal formalism applied to bipartite entanglement: theoretical and experimental exploration // *Phys. Rev. A*. 2006. V. 73. P. 032323.
5. Lloyd S., Maccone L., Garcia-Patron R., Giovannetti V., Shikano Y., Pirandola S., Rozema L.A., Darabi A., Soudagar Y., Shalm L.K., Steinberg A.M. Closed timelike curves via post-selection: theory and experimental demonstration // *Phys. Rev. Lett.* 2011. V. 106, 040403.
6. Ma X.-S., Zotter S., J. Kofler, Ursin R., Jennewien T., Brukner Č., Zeilinger A. Experimental delayed-choice entanglement swapping // *Nature Physics*. 2012. V. 8, 479-485 (2012).
7. Коротаев С.М., Морозов А.Н., Сердюк В.О., Сорокин М.О. Проявление макроскопической нелокальности в некоторых естественных диссипативных процессах // *Известия высших учебных заведений Физика*. 2002. №5. С. 3-14.
8. Korotaev S.M., Serdyuk V.O., Nalivaiko V.I. Novysh A.V., Gaidash S.P., Gorokhov Yu.V., Pulinets S.A., Kanonidi Kh.D. Experimental estimation of macroscopic nonlocality effect in solar and geomagnetic activity // *Phys. of Wave Phenomena*. 2003. V. 11. No 1. P. 46–55.
9. Korotaev S.M., Morozov A.N., Serdyuk V.O., Gorohov J.V. Experimental evidence of nonlocal transaction in reverse time // *Physical Interpretation of Relativity Theory*. Moscow: BMSTU Press, 2003. P. 200-212.
10. Korotaev S.M., Serdyuk V.O., Gorohov J.V., Pulinets S.A., Machinin V.A. Forecasting effect of macroscopic nonlocality // *Frontier Perspectives*. 2004. V.13. No 1. P. 41-45.
11. Korotaev S.M., Morozov A.N., Serdyuk V.O., Nalivayko V.I., Novysh A.V., Gaidash S.P., Gorohov J.V., Pulinets S.A., Kanonidi Kh. D. Manifestation of macroscopic nonlocality in the processes of solar and geomagnetic activity // *VESTNIK Journal of BMSTU*. 2005. Special Issue. P. 173-185.
12. Korotaev S.M., Morozov A.N., Serdyuk V.O., Gorohov J.V., Machinin V.A. Experimental study of macroscopic nonlocality of large-scale geomagnetic dissipative processes. // *NeuroQuantology*. 2005. V. 3. P. 275–294.
13. Korotaev S.M., Morozov A.N., Serdyuk V.O., Gorohov J.V., Machinin V.A. Experimental study of advanced nonlocal correlation of large scale dissipative processes // *Physical Interpretation of Relativity Theory. Proceeding of International Scientific Meeting*. BMSTU Press, 2005. P. 209 – 215.

14. Korotaev S.M. Experimental study of advanced correlation of some geophysical and astrophysical processes. // *Int. J. of Computing Anticipatory Systems*. 2006. Vol. 17. P. 61–76.
15. Коротаев С.М., Морозов А.Н., Сердюк В.О., Горохов Ю.В., Филиппов Б.П., Мачинин В.А. Экспериментальное исследование опережающих нелокальных корреляций процесса солнечной активности // *Известия высших учебных заведений Физика*. 2007. №4. С. 26-33.
16. Korotaev S.M., Serdyuk V.O., Gorohov J.V. Signals in reverse time from heliogeophysical processes and their employment for the long-term forecast // *Physical Interpretation of Relativity Theory. Proceeding of International Scientific Meeting*. BMSTU Press, 2007. P. 222 – 230.
17. Korotaev S.M., Serdyuk V.O., Gorohov J.V. Forecast of solar and geomagnetic activity on the macroscopic nonlocality effect. // *Hadronic Journal*. 2007. V. 30. No 1. P. 39–56.
18. Коротаев С.М., Сердюк В.О., Горохов Ю.В. Прогноз геомагнитной и солнечной активности на основе нелокальных корреляций // *Доклады Академии наук*. 2007. Т. 415. № 6. С. 814-817.
19. Korotaev S.M., Serdyuk V.O. The forecast of fluctuating large-scale natural processes and macroscopic correlations effect. // *Int. J. of Computing Anticipatory Systems*. 2008. V. 29. P. 31–46.
20. Korotaev S.M. *Causality and Reversibility in Irreversible Time*. Scientific Research Publishing, Inc., USA, 2011. 117 –p.
21. Yee E., Paulson K.V. Concerning dispersion relations for the magnetotelluric impedance tensor // *Geophys. J. Int.* 1988. V. 95. P. 549-559.
22. Egbert G.D. Comments on ‘Concerning dispersion relations for the magnetotelluric impedance tensor’ by E. Yee and K.V. Paulson // *Geophys. J. Int.* 1990. V. 102. P. 1-8.
23. Козырев Н.А. *Избранные труды*. Л.: ЛГУ, 1991.-447 с.
24. Рейхненбах Г. *Направление времени*. М.: Эдиториал УРСС, 2010.-360 с.
25. Хейс Д. *Причинный анализ в статистических исследованиях*. М.: Финансы и статистика, 1981.-354 с.
26. Korotaev S.M. Formal definition of causality and Kozyrev’s axioms // *Galilean Electrodynamics*. 1993. V. 4. No 5. P. 86–90.
27. Коротаев С.М. О возможности причинного анализа геофизических процессов. // *Геомагнетизм и аэрономия*. 1992. Т. 32. № 1. С. 27–33.
28. Коротаев С.М., Хачай О.А., Шабелянский С.В. Применение причинного анализа к процессу вертикальной диффузии магнитного поля в океане. // *Геомагнетизм и аэрономия*. – 1992. Т. 32. № 1. С. 48–53.
29. Коротаев С.М., Хачай О.А. Причинный анализ и его применение для изучения электромагнитных процессов в море. // *Известия АН Физика Земли* 1992. № 4 С. 52–61.
30. Коротаев, С.М., Хачай О.А., Лоу Л.К. Результаты применения причинного анализа к наблюдениям переменного магнитного поля в море. // *Известия АН Физика Земли*. 1992. № 5 С. 35–44.
31. Коротаев С.М., Шабелянский С.В., Сердюк В.О. Обобщенный причин-

- ный анализ и его применение для изучения электромагнитного поля в море // Известия АН Физика Земли. 1992. № 6 С. 77–66.
32. Хачай О.А., Коротаев С.М., Троянов А.К. Результаты применения причинного анализа для обработки скважинных данных сейсмоакустической и электромагнитной эмиссии // Вулканология и сейсмология 1992. № 3 С. 92–100.
  33. Коротаев С.М., Хачай О.А. Роль запаздывания в причинном анализе геофизических процессов. // Геомагнетизм и аэрономия. 1992. Т. 32. № 4. С. 119–121.
  34. Коротаев С.М., Хачай О.А., Шабелянский С.В. Причинный анализ процесса горизонтальной информационной диффузии электромагнитного поля в океане. // Геомагнетизм и аэрономия 1993. Т. 33. № 2. С. 128–133.
  35. Арушанов М.Л., Коротаев С.М. Причинный анализ и его применение для изучения физических процессов в атмосфере. // Метеорология и гидрология. 1994. № 6 С. 15–22.
  36. Коротаев С.М. Роль различных определений энтропии в причинном анализе геофизических процессов и их приложение к электромагнитной индукции в морских течениях. // Геомагнетизм и аэрономия. 1995. Т. 35. № 3. С. 116–125.
  37. Życzkowski K., Horodecki P., Horodecki M., Horodecki R. Dynamics of quantum entanglement. // Phys. Rev. A. 2002. V. 65. P. 012101.
  38. Шеннон К.Э. Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963. –829 с.
  39. Cerf N.J., Adami C. Quantum extension of conditional probability. // Phys. Rev. A. 1999. V. 60. P. 863–897.
  40. Cerf N.J., Entropic bounds on coding for noisy quantum channels. // Phys. Rev. A. 1998. V. 57. P. 3330–3347.
  41. Mukohyama S. Comments on entanglement entropy. // Phys. Rev D. 1998. V. 58. P. 104023.
  42. Korotaev S.M., Kiktenko E.O. Causal analysis of the quantum states // Search for Fundamental Theory. AIP Proceedings. 2010. V. 295. P. 1316–.
  43. Коротаев С.М., Киктенко Е.О. Причинный анализ квантовых запутанных состояний. // Вестник МГТУ Естественные науки. 2010. Ч. I № 3. С. 35-55. Ч. II № 4. С. 29-47.
  44. Borrás A., Plastino A.R., Casas M., Plastino A. Quantum brachistochrone evolution of systems of two identical particles: The role of entanglement // Phys. Rev. A. 2008. V. 78. P. 052104.
  45. Wootters W.K. Entanglement of formation of an arbitrary states of two qubits // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 2245–2248.
  46. Dür W. Multipartite entanglement that is robust against disposal of the particles // Phys. Rev. A. 2001. V. 63. P. 020303.
  47. Plenio M.B., Huelga S.F., Biega A., Knight P.L. Cavity-loss-induced generation of entangled atoms // Phys. Rev. A. 1999. V. 59. P. 2468–2475.
  48. Башаров А. М. Декогеренция и перепутывание при радиационном распаде двухатомной системы // ЖЭТФ. 2002. Т. 59. Вып. 6. С. 1249–1260.

49. Plenio M.B., Huelga S.F. Entangled light from white noise // *Phys. Rev. Lett.* 2002. V. 88. P. 197901.
50. Kim M.S., Lee J., Ahn D., Knight P.L. Entanglement induced by a single-mode heat environment // *Phys. Rev. A.* 2002. Vol. 65. P. 040101.
51. Braun D. Creation of entanglement by interaction with a common heat bath // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89. P. 277901.
52. Jakobczyk L. Entangling two qubits by dissipation // *J. Phys. A.* 2002. Vol. 35. P. 6383–6392.
53. Benatti F., Floreanini R., Piani M. Environment induced entanglement in Markovian dissipative dynamics // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 91. P. 070402.
54. Choi T., Lee H.J. Quantum entanglement induced by dissipation // *Phys. Rev. A.* 2007. V. 76. P. 012308.
55. Munro W.J., James D.F.V., White A.G. Kwiat P.G. Maximizing the entanglement of two mixing qubits // *Phys. Rev. A.* 2001. V. 64. P. 030302.
56. Coffman V., Kundu J., Wootters W.K. Distributed entanglement // *Phys. Rev. A.* 2000. V. 61. P. 052306.
57. Rajagopal A.K., Rendell R.W. Robust and fragile entanglement of three qubits: Relation to permutation symmetry // *Phys. Rev. A.* 2002. Vol. 65. P. 032328.
58. Rajagopal A.K., Rendell R.W. Separability and correlation in composite states based on entropy methods // *Phys. Rev. A.* 2002. V. 66. P. 022104.
59. Sun Y., Chen Y., Chen H. Thermal entanglement in the two-qubit Heisenberg  $XY$  model under a nonuniform external magnetic field // *Phys. Rev. A.* 2003. V. 68. P. 044301.
60. Wang X., Wang Z.D. Thermal entanglement in ferromagnetic chains // *Phys. Rev. A.* 2006. V. 73. P. 064302.
61. Jang S.S., Cheong Y.W., Kim J. Lee H.-W. Robustness of multiparty nonlocality to local decoherence // *Phys. Rev. A.* 2006. V. 74. P. 062112.
62. Song W., Chen Z.-B. Invariant information and complementary in high-dimensional states // *Phys. Rev. A.* 2007. V. 76. P. 014307.
63. Коротаев С.М., Киктенко Е.О. Причинность в квантовых запутанных состояниях // *Вестник МГТУ Естественные науки.* 2011. № 3. С. 90-107.
64. Korotaev S.M., Kiktenko E.O. Causality in the entangled states // *Physical Interpretation of Relativity Theory. Proceeding of International Scientific Meeting.* BMSTU Press, 2012. P. 140-149.
65. Korotaev S.M., Kiktenko E.O. Causality and decoherence in the asymmetric states // *Physica Scripta.* 2012. V. 85. P. 055006.
66. Kiktenko E.O., Korotaev S.M. Causal analysis of asymmetric entangled states // *Physics Letters A.* 2012. V.376. P. 820-823.
67. Киктенко Е.О. Запутанность и причинность при взаимодействии двухуровневого атома с резонансным полем // *Физическое образование в вузах. Приложение к журналу.* 2012. Т. 18. №1. С.6-7
68. Jaynes E. T. and Cummings F.W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theory with application to the beam maser // *Proc. IEEE.* 1963. V. 51. P. 89.
69. Вальтер Г. Одноатомный мазер и другие эксперименты квантовой элек-



- тродинамики резонатора. УФН. 1996. № 166. С. 777-794.
70. Bose S., Fuentes-Guridi I., Knight P. L. and Vedral V. Subsystem purity as an enforcer of entanglement // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V. 87. P. 050401.
  71. Федоров А.К., Юрченко С.О. Симплектические томограммы в представлении фейнмановских интегралов по траекториям // *Вестник МГТУ Естественные науки.* 2012. №2 С. 29-37.
  72. Федоров А.К., Юрченко С.О. Томографические методы в теории вторичного квантования // *Наука и образование: электронное научнотехническое издание.* 2011. №13 С. 62-67.
  73. Федоров А.К. Томограммы конденсата Бозе-Эйнштейна и уравнение Гросса-Питаевского // *Студ. науч. вест. МГТУ им. Н.Э. Баумана.* 2012 № XII-IV. С. 168-173.
  74. Arkhipov A.S., Lozovik Yu.E. Quantum Tomography as a New Approach to Simulating Quantum Processes // *J. Exp. Theor. Phys.* 2004, V. 98. P. 231-239.
  75. Arkhipov A.S., Lozovik Yu.E. New Method of Quantum Dynamics Simulation Based on the Quantum Tomography // *Phys. Lett. A.* 2003. V. 319. P. 217-224.
  76. Манько В.И., Манько О.В., Сафонов С.С. Описание спиноров с помощью функций распределения вероятностей // *ТМФ.* 1998. № 2 (115). С. 185-198.
  77. Андреев В.А., Манько В.И., Манько О.В., Щукин Е.В. Томография спиновых состояний, критерий перепутанности и неравенства Белла // *ТМФ.* 2006. № 1 (146). С. 172-185.
  78. Beck M., Smithey D.T., Raymer M.G. Experimental Determination of Quantum-phase Distributions Using Optical Homodyne Tomography // *Phys. Rev. A.* 1993. V. 48. P. 890-893.
  79. Smithey D.T., Beck M., Raymer M.G., Faridani A. Measurement of the Wigner Distribution and the Density Matrix of a Light Mode Using Optical Homodyne Tomography: Application to Squeezed States and the Vacuum // *Phys. Rev. Lett.* 1993 V. 70. P. 1244-1247.