Теоретико-топосный подход к описанию ветвящегося пространства-времени

Л.В. Ильичёв*

Аннотация

Свойства ветвящегося пространства-времени в трактовке Н.Белнапа отражены в объектах топоса контравариантных функторов из категории $\mathcal{C}$ – причинного множества событий, моделирующего пространство-время – в категорию множеств. Совокупность этих функторов, называемых также предпучками, несёт структуру алгебры Гейтинга, являющейся моделью языка высказываний, обладающего интуиционистской логикой и естественным образом возникающего при рассмотрении аспектов "ветвистости" пространства-времени. Локальная в пространстве-времени истинность высказываний этого языка может (как это характерно для логики топосов) принимать промежуточные значения.

Ключевые слова: топос, категория, функтор, причинное множество, алгебра Гейтинга

1 Введение

Ишам и Дюринг [1] выдвинули фундаментальную концепцию конструирования физических теорий. Предлагается искать топосное представление используемого в теории формального языка. Достаточно известным примером реализации данной концепции (хронологически ей предшествующим) служит работа Фотини Маркополо [2]. В ней с новой точки зрения рассмотрены свойства так называемого причинного множества $\mathcal{C}$ – дискретного аналога пространства-времени общей теории относительности. Интерес к этому множеству инициирован гипотезой о дискретности мира событий на субпланковских масштабах. Причинное множество $\mathcal{C}$ фигурирует и в настоящей работе. $\mathcal{C}$ есть частично упорядоченное множество элементов – событий. Некоторые упорядоченные пары $\langle e, e' \rangle$ событий принадлежат причинному отношению $e \rightsquigarrow e'$, отражающему факт, что событие e' есть следствие события e или, эквивалентно, что событие e есть причина события e'. Причинное отношение является рефлексивным (для любого события e из $\mathcal{C}$ имеет место $e \rightsquigarrow e$), транзитивным (из $e \rightsquigarrow e'$ и $e' \rightsquigarrow e''$ следует $e \rightsquigarrow e''$) и антисимметричным (если $e \rightsquigarrow e'$ и $e' \rightsquigarrow e$, то $e = e'$). Последнее условие гарантирует отсутствие замкнутых причинных петель. Мы исключим существование в $\mathcal{C}$ последнего события e_{fin}, являющегося следствием любого события из $\mathcal{C}$. Это важно для обеспечения нетривиальности предмета настоящей работы.

*Новосибирский государственный университет, Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Новосибирск, Россия. E-mail: leonid@iae.nsk.su

Частичный порядок на причинном множестве $\mathcal{C}$ позволяет рассматривать его как категорию, объектами которой являются события, а морфизмами (стрелками) – причинные отношения между событиями, так что множество морфизмов $Mor_{\mathcal{C}}(e, e')$ из e в e' состоит самое большее из одного элемента. И это имеет место в том и только в том случае, когда e есть причина для e'. Используя аппарат теории категорий, Маркополо ввела (ковариантный) функтор $Past$ из категории $\mathcal{C}$ в категорию множеств Set. Каждому событию e из $\mathcal{C}$ этот функтор сопоставляет множество $Past_e = \{e' \in \mathcal{C} : e' \rightsquigarrow e\}$ – совокупность всех событий, находящихся в прошлом по отношению к e, а каждому причинному отношению $e_1 \rightsquigarrow e_2$ сопоставляется отображение множеств $Past_{e_1 e_2} : Past_{e_1} \to Past_{e_2}$, являющееся вложением множеств.

Важность функтора $Past$ в работе [2] обусловлена его простым физическим смыслом. $Past_e$ как аналог причинного конуса прошлого есть содержание памяти локального наблюдателя, чьё положение в пространстве и времени специфицируется событием e. При этом в функторе $Past$ отражена вся структура причинных отношений между событиями. В настоящей работе также реализуется подход к $\mathcal{C}$ с точки зрения локального наблюдателя, но свойства причинного множества $\mathcal{C}$, на выявление которых нацелен данный подход, несколько ỳже. Мы намерены развить взгляд на $\mathcal{C}$ как на модель *ветвящегося пространства-времени.* Само понятие "ветвистости" обретёт при этом строгое смысловое наполнение. Интуитивная мотивация предлагаемого подхода диктуется желанием создать инструментарий для оценки локальным наблюдателем многовариантности своего будущего. Английской версией подзаголовка настоящей статьи (в стиле подзаголовка [2]) могла бы поэтому служить фраза "What should the branching universe be thought of from the inside?".

То, что мы собираемся построить, является топосным представлением теории ветвящегося пространства-времени Нуэля Белнапа [3] – концепции, призванной объединить в одном подходе идеи индетерминизма и релятивизма. В следующем разделе вместе с элементарными понятиями теории категорий вводится главное понятие модели классического ветвящегося пространства-времени – так называемый мир Белнапа (сам Белнап использует термин "история"). Во третьем разделе построены основные элементы категорного (топосного) оформления этой модели, показывается возникновение присущей ей естественной логики. В четвёртом разделе осуществляется приложение стандартной конструкции локальных в пространстве-времени показателей истинности к утверждениям из рассматриваемой модели.

2 Основные понятия

Как известно [4], задание категории C состоит в указании её объектов и морфизмов (стрелок) между ними. Для некоторых морфизмов определён закон композиции по следующему принципу. Если $Mor_C(c, c')$ – совокупность морфизмов из объекта c в объект c', то на прямом произведении $Mor_C(c_1, c_2) \times Mor_C(c_2, c_3)$ определёно правило, сопоставляющее каждому элементу этого прямого произведения некоторый элемент из $Mor_C(c_1, c_3)$. При этом выполняется ассоциативность закона композиции и в каждой совокупности $Mor_C(c, c)$ есть морфизм 1_c, действующий как левая единица при образовании композиции с элементами из $Mor_C(c, c')$ и как правая единица при композиции с элементами из $Mor_C(c', c)$. Важнейшим является понятие категории Set, объектами которой служат всевозможные множества, а морфизмами – отображения между ними.

Функтором (ковариантным) $\mathcal{F}$ из категории C_1 в категорию C_2 называется правило "проецирования" структуры категории C_1 в C_2. Каждому объекту c из C_1 при этом сопоставляется объект $\mathcal{F}_c$ из C_2, а каждому морфизму f из $Mor_{C_1}(c, c')$ сопоставляется морфизм $\mathcal{F}_f$ из $Mor_{C_2}(\mathcal{F}_c, \mathcal{F}_{c'})$. При этом единичные морфизмы переводятся в единичные и при сопоставлении сохраняются все композиции морфизмов. Специфика контравариантного функтора состоит в обращении направления стрелок-морфизмов: морфизму f из $Mor_{C_1}(c, c')$ сопоставляется морфизм $\mathcal{F}_f$ из $Mor_{C_2}(\mathcal{F}_{c'}, \mathcal{F}_c)$.

Сами функторы из C_1 в C_2 можно рассматривать как объекты некоторой третьей категории, обозначаемой $C_2^{C_1}$. Морфизмы между функторами называются естественными преобразованиями. Их природа будет проиллюстрирована на конкретных примерах далее в тексте.

Строгое определение топоса, как специального вида категории, нам не понадобится [5]. В некотором смысле все топосы похожи на классический топос – категорию Set. Важным является факт, что если C_2 – топос, то $C_2^{C_1}$ – также топос. Ниже мы будем пользоваться топосом $Set^{\mathcal{C}}$.

Для описания $\mathcal{C}$ как ветвящегося пространства-времени удобно ввести в рассмотрения подмножества из $\mathcal{C}$, полностью лишённые свойства "ветвистости" и, следовательно, случайности в глобальном смысле. Богатство совокупности таких подмножеств может служить показателем того, насколько этим свойством обладает само причинное множество $\mathcal{C}$. Эти множества будем называть *мирами Белнапа* и определим их, следуя [3], как *максимальные направленные от причины к следствию подмножества из* $\mathcal{C}$. Направленность отражает естественное и интуитивно необходимое свойство любого неветвящегося мира – для любых двух событий e_1 и e_2, принадлежащих миру w, в w должно существовать событие e, являющееся их общим следствием: $e_1 \rightsquigarrow e$ и $e_2 \rightsquigarrow e$. Условие максимальности не позволяет миру входить как собственное подмножество в некоторый более широкий мир. Ясным становится необходимость обычно накладываемого условия отсутствия в $\mathcal{C}$ конечного события e_{fin} ("Большой хлопок"). Его наличие превратило бы $\mathcal{C}$ в единственное максимальное направленное множество и сделало бы предмет предлагаемого подхода тривиальным.

Из стандартного применения леммы Куратовского-Цорна следует, что любое событие принадлежит некоторому миру Белнапа. Действительно, строя для рассматриваемого события возрастающую цепь содержащих его направленных множеств мы обнаруживаем, что их объединение есть верхняя грань для этой цепи. Отсюда следует существование максимального направленного подмножества в $\mathcal{C}$, содержащего данное событие. В общем случае для выбранной пары событий e_1 и e_2 не обязательно существование содержащего её мира – такие события оказываются *несовместными*. Естественно, например, ожидать, что события фиксации взаимно исключающих результатов некоторого квантового измерения окажутся несовместными. Не следует отождествлять это понятие с отсутствием причинной связи между событиями.

3 Основной объект и подобъекты

Предметом нашего рассмотрения будут определённые контравариантные функторы из $\mathcal{C}$ в Set, т.е. объекты категории (топоса) $Set^{\mathcal{C}^{op}}$, где $\mathcal{C}^{op}$ – категория, получающаяся из $\mathcal{C}$ формальным обращением всех стрелок, обозначающих причинную зависимость. В этом исходном пункте наше рассмотрение уже несколько отличается от подхода работы [2], где фигурируют ковариантные функторы.

Пусть W – множество всех миров Белнапа на $\mathcal{C}$. Имеет место простая, но важная

Теорема 3.1. *Приписывая любому событию e множество содержащих его миров Белнапа* $\mathbf{Loc}_e = \{w \in W : e \in w\}$, *мы определяем функтор* $\mathbf{Loc}$ *из* $\mathcal{C}^{op}$ *в* Set.

Доказательство: Множества $\mathbf{Loc}_e$ определяют функцию объектов функтора. Остаётся прояснить природу функции причинных стрелок $e_1 \rightsquigarrow e_2$ из $\mathcal{C}$. Это должно быть отображение

$$\mathbf{Loc}_{e_1e_2} : \mathbf{Loc}_{e_2} \to \mathbf{Loc}_{e_1}, \tag{1}$$

которое оказывается вложением множеств. Для доказательства этого факта воспользуемся максимальностью миров Белнапа, ведущее к замкнутости их относительно событий-причин [3]: если некоторое событие e есть причина события $e' \in w$, т.е. $e \rightsquigarrow e'$, то в мире w существует общее следствие для пары событий e и e'', где e'' – любое событие из w (этим общим следствием в силу транзитивности отношения причинной связи может служить общее следствие пары событий e' и e'', существующее согласно свойству направленности мира w). Поэтому, можно расширить мир w, включив в него событие e. Но если мир w максимален, то такое расширение невозможно и, следовательно, событие e должно принадлежать ему уже изначально.Поэтому каждый мир, содержащий e_2, содержит также и e_1, и, следовательно, $\mathbf{Loc}_{e_1e_2}$ (1) является вложением.

$\square$

Функтор $\mathbf{Loc}$ является аналогом функтора $Past$ из работы [2] и столь же важен. По своему смыслу $\mathbf{Loc}_e$ есть совокупность миров, в которых обнаруживает себя локальный наблюдатель, находящийся в e.

Введём также функтор $\mathbf{Glob}$ (аналог функтора $World$ из [2]) по правилам

$$\mathbf{Glob}_e = W, \tag{2}$$

и при $e_1 \rightsquigarrow e_2$

$$\mathbf{Glob}_{e_1e_2} = id_W : \mathbf{Glob}_{e_2} \to \mathbf{Glob}_{e_1}, \tag{3}$$

Между функторами из $\mathcal{C}^{op}$ в Set, объектами категории $Set^{\mathcal{C}^{op}}$, существуют морфизмы, называемые естественными преобразованиями [4]. В частности, естественное преобразование

$$[\iota_{\mathbf{Loc}}] : \mathbf{Loc} \to \mathbf{Glob} \tag{4}$$

представляет собой совокупность $\{[\iota_{\mathbf{Loc}}]_e : e \in \mathcal{C}\}$ отображений множеств $[\iota_{\mathbf{Loc}}]_e : \mathbf{Loc}_e \to \mathbf{Glob}_e$, обеспечивающих коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Loc}_{e_2} \arrow[r, "{[\iota_{\mathbf{Loc}}]_{e_2}}"] \arrow[d, "\mathbf{Loc}_{e_1e_2}"'] & \mathbf{Glob}_{e_2} \arrow[d, "\mathbf{Glob}_{e_1e_2}=id_W"] \\ \mathbf{Loc}_{e_1} \arrow[r, "{[\iota_{\mathbf{Loc}}]_{e_1}}"] & \mathbf{Glob}_{e_1} \end{tikzcd} \tag{5}$$

для любой пары $e_1 \rightsquigarrow e_2$ причинно связанных событий, т.е. $id_W \circ [\iota_{\mathbf{Loc}}]_{e_2} = [\iota_{\mathbf{Loc}}]_{e_1} \circ \mathbf{Loc}_{e_1e_2}$. В данном простом случае отображения $[\iota_{\mathbf{Loc}}]_e$, называемые компонентами естественного преобразования (4), являются обычными вложениями множеств. Это обстоятельство делает функтор $\mathbf{Loc}$ подфунктором в $\mathbf{Glob}$. Если трактовать $\mathbf{Glob}$ как объект категории $Set^{\mathcal{C}^{op}}$, то $\mathbf{Loc}$ оказывается его *подобъектом.*

Совокупность подобъектов объекта **Glob** весьма важна в топосном подходе к ветвящемуся пространству-времени. Как известно [5], совокупность подобъектов любого объекта в топосе несёт структуру алгебры Гейтинга и является моделью естественного языка, на котором формулируются утверждения касательно исследуемой системы (в нашем случае – ветвящегося пространства-времени $\mathcal{C}$) и их логические связки [1]. Логика языка отличается от обычной классической логики, в основе которой лежит алгебра Буля. Представители логических связок реализуются как алгебраические операции на подобъектах объекта **Glob**. Бинарная операция конъюнкции $\mathbf{F} \wedge \mathbf{G}$, моделирующая логическую связку "и", для подобъектов $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ есть подфунктор в **Glob** такой, что

$$(\mathbf{F} \wedge \mathbf{G})_e =_{df} \ \mathbf{F}_e \cap \mathbf{G}_e. \tag{6}$$

Аналогично, операция дизъюнкции $\mathbf{F} \vee \mathbf{G}$, моделирующая связку "или", определяется следующим образом:

$$(\mathbf{F} \vee \mathbf{G})_e =_{df} \ \mathbf{F}_e \cup \mathbf{G}_e. \tag{7}$$

Поскольку для причинной связи $e_1 \rightsquigarrow e_2$ отображения $\mathbf{F}_{e_1e_2}$ и $\mathbf{G}_{e_1e_2}$ являются вложениями множеств (это следует из соответствующих коммутативных диаграмм, аналогичных (5), в которых горизонтальные стрелки являются вложениями), то вложениями оказываются и отображения

$$(\mathbf{F} \wedge \mathbf{G})_{e_1e_2} : (\mathbf{F} \wedge \mathbf{G})_{e_2} \to (\mathbf{F} \wedge \mathbf{G})_{e_1} \tag{8}$$

и

$$(\mathbf{F} \vee \mathbf{G})_{e_1e_2} : (\mathbf{F} \vee \mathbf{G})_{e_2} \to (\mathbf{F} \vee \mathbf{G})_{e_1}. \tag{9}$$

Бинарную операцию $\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{G}$, моделирующую логическую импликацию, определим следующим образом:

$$(\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{G})_e =_{df} \ \{w \in W : \forall\, e' \rightsquigarrow e \ (w \in \mathbf{F}_{e'}) \Rightarrow (w \in \mathbf{G}_{e'})\}. \tag{10}$$

Здесь символ $\Rightarrow$ в левой части обозначает бинарную операцию на функторах $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$, а в правой – обычную логическую связку "если..., то...". Нетрудно убедиться, что для любой причинной стрелки $e_1 \rightsquigarrow e_2$ множество $(\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{G})_{e_2}$ есть подмножество в $(\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{G})_{e_1}$. Поэтому функторный образ причинной стрелки

$$(\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{G})_{e_1e_2} : \ (\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{G})_{e_2} \to (\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{G})_{e_1} \tag{11}$$

является вложением.

Операция импликации позволяет определить на множестве подфункторов из **Glob** унарную операцию отрицания $\neg$. Введём предварительно нулевой подобъект $\emptyset$ из **Glob**. Это подфунктор, который сопоставляет любому событию из $\mathcal{C}$ пустое множество. Положим

$$\neg\mathbf{F} =_{df} \ (\mathbf{F} \Rightarrow \emptyset). \tag{12}$$

Из этого определения и (10) следует, что

$$(\neg\mathbf{F})_e = \{w \in W : \forall\, e' \rightsquigarrow e \ \ (w \notin \mathbf{F}_{e'})\}. \tag{13}$$

Очевидно, что пересечение $\mathbf{F}_e \cap (\neg\mathbf{F})_e$ есть пустое множество. Следовательно

$$\mathbf{F} \wedge (\neg\mathbf{F}) = \emptyset. \tag{14}$$

При этом в общем случае

$$\mathbf{F} \vee (\neg \mathbf{F}) \neq \mathbf{Glob}. \tag{15}$$

Если бы в последнем выражении имело место равенство, можно было бы отождествить $\mathbf{F}$ и $\neg\neg\mathbf{F}$. Однако, это не так и имеет место лишь более слабое утверждение, гласящее, что $\mathbf{F}$ есть подфунктор в $\neg\neg\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F}_e \subseteq (\neg\neg\mathbf{F})_e. \tag{16}$$

Действительно, на основании (13) имеем

$$(\neg\neg\mathbf{F})_e = \{w \in W : \forall\, e' \rightsquigarrow e\ \exists\, e'' \rightsquigarrow e'\ (w \in \mathbf{F}_{e''})\}. \tag{17}$$

Из включения $\mathbf{F}_e \subseteq \mathbf{F}_{e''}$, имеющего место как только $e'' \rightsquigarrow e$, следует (16). Обратное включение $(\neg\neg\mathbf{F})_e$ в $\mathbf{F}_e$ в общем случае места не имеет, и тогда $\mathbf{F}_e \subsetneq (\neg\neg\mathbf{F})_e$. Учтём, что, согласно (14), $(\neg\mathbf{F})_e \cap (\neg\neg\mathbf{F})_e = \varnothing$. Поэтому $(\neg\mathbf{F})_e \cup (\mathbf{F})_e$ есть собственное подмножество множества $(\neg\mathbf{F})_e \cup (\neg\neg\mathbf{F})_e$, в свою очередь входящего в W. Следовательно, $(\neg\mathbf{F}) \vee \mathbf{F}$ есть собственный подфунктор в $\mathbf{Glob}$.

Выражение (15) есть фактически указание на невыполнение в логике подобъектов функтора $\mathbf{Glob}$ принципа исключения третьего (сам функтор $\mathbf{Glob}$ играет роль единицы – тождественно истинного утверждения). Это общее свойство логики топосов, отличных от Set [5]. Логика оказывается интуиционистской. В ней, очевидно, нельзя пользоваться при доказательствах принципом "от противного".

В работе [2] было замечено, что в структуре функтора $\neg Past$ отражены важные свойства причинного множества $\mathcal{C}$. А именно, если $\mathcal{C}$ является решёткой, $\neg Past = \emptyset$ (здесь, строго говоря, функтор $\emptyset$ является, как и $Past$, объектом категории $Set^{\mathcal{C}}$ и отличен своего контравариантного аналога). Это следует из определения

$$(\neg Past)_e = \{e' \in \mathcal{C} : \forall e \rightsquigarrow e''(e' \notin Past_{e''})\}. \tag{18}$$

Видно, что если любая пара событий имеет верхнюю грань (общее следствие), $(\neg Past)_e$ оказывается пустым множеством. С точки зрения нашего подхода, выявляющего аспекты ветвления $\mathcal{C}$, более информативным является очевидное

Предложение 3.1. *Предмет настоящей работы (ветвящийся характер пространства-времени) является нетривиальным в том и только том случае, когда функтор* $\neg Past$ *из [2] не пуст.*

. □

Как уже было сказано, аналогом $Past$ в нашем случае является функтор $\mathbf{Loc}$. Следовательно, есть основания ожидать, что в структуре его отрицания также отражены важные свойства $\mathcal{C}$ и совокупности миров Белнапа. Имеем, согласно (13):

$$(\neg\mathbf{Loc})_e = \{w \in W : \forall\, e' \rightsquigarrow e\ \ (e' \notin w)\}. \tag{19}$$

Нетрудно проверить, что

$$(\neg\mathbf{Loc} = \emptyset) \Leftrightarrow (\forall e \in \mathcal{C}\ \forall w \in W\ \ Past_e \cap w \neq \varnothing). \tag{20}$$

Таким образом имеет место

Предложение 3.2. *Пустота* $\neg\mathbf{Loc}$ *эквивалентна непустоте пересечения любого мира Белнапа с прошлым любого события.*

. □

Это имеет место, в частности, если в $\mathcal{C}$ есть начальное событие e_{in} ("Большой взрыв"), такое что $e_{in} \rightsquigarrow e$ для любого другого события e из $\mathcal{C}$.

4 Классификатор подобъектов

В $Set^{\mathcal{C}^{op}}$, как и в любом топосе, для любого объекта существует классификатор его подобъектов. Интуитивно, классификатор подобъектов является носителем обобщённых значений истинности некоторой совокупности утверждений. Проиллюстрируем это, воспроизведя с приложением к приводимому рассмотрению общую конструкцию [5] классификатора подобъектов для категории контравариантных функторов из $\mathcal{C}$ в Set.

Рассмотрим $Mor_{\mathcal{C}}(\cdot, e)$ – множество причинных стрелок, оканчивающихся в e. Нас будут интересовать особые подмножества из $Mor_{\mathcal{C}}(\cdot, e)$, называемые решётами на e. Любое решето $S \subseteq Mor_{\mathcal{C}}(\cdot, e)$ замкнуто в следующем смысле: если $(e' \rightsquigarrow e) \in S$, и имеется причинная стрелка $e'' \rightsquigarrow e'$, то $(e'' \rightsquigarrow e) \in S$. Максимальное решето на e есть само множество $Mor_{\mathcal{C}}(\cdot, e)$. Его пустое подмножество есть минимальное решето.

Введём множество

$$\mathbf{\Omega}_e =_{df} \{S : S \text{ – решето на } e\}. \tag{21}$$

Для любой причинной стрелки $e_1 \rightsquigarrow e_2$ введём отображение множеств

$$\mathbf{\Omega}_{e_1 e_2} : \mathbf{\Omega}_{e_2} \to \mathbf{\Omega}_{e_1} \tag{22}$$

по следующему правилу: если S – решето на e_2, то

$$\mathbf{\Omega}_{e_1 e_2}(S) =_{df} \{(e \rightsquigarrow e_1) \in Mor_{\mathcal{C}}(\cdot, e_1) : (e \rightsquigarrow e_2) \in S\} \tag{23}$$

есть его образ в $\mathbf{\Omega}_{e_1}$. Выражения (21) – (23) позволяют трактовать их как результаты применения контравариантного функтора $\mathbf{\Omega}$ из $\mathcal{C}$ в Set.

Для любого подобъекта $\mathbf{F}$ из $\mathbf{Glob}$ и соответствующего вложения

$$[\iota_{\mathbf{F}}] : \mathbf{F} \to \mathbf{Glob} \tag{24}$$

введём следующие отображения множеств

$$[\chi_{\mathbf{F}}]_e : W \to \mathbf{\Omega}_e, \tag{25}$$

сопоставляющее каждому миру Белнапа некоторое решето на e:

$$[\chi_{\mathbf{F}}]_e(w) =_{df} \{(e' \rightsquigarrow e) \in Mor_{\mathcal{C}}(\cdot, e) : w \in \mathbf{F}_{e'}\}. \tag{26}$$

Это действительно решето: если причинная пара $e' \rightsquigarrow e$ принадлежит правой части (26) и есть стрелка $e'' \rightsquigarrow e'$, то $w \in \mathbf{F}_{e''}$, т.к. $\mathbf{F}_{e'} \subseteq \mathbf{F}_{e''}$ и, следовательно, $e'' \rightsquigarrow e$ также принадлежит правой части (26).

Важным фактом является то, что отображения (25), определённые для разных событий из $\mathcal{C}$, делают коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{[\chi_{\mathbf{F}}]_{e_2}} & \mathbf{\Omega}_{e_2} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle id_W} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{\Omega}_{e_1 e_2}} \\ W & \xrightarrow{[\chi_{\mathbf{F}}]_{e_1}} & \mathbf{\Omega}_{e_1}, \end{array} \tag{27}$$

построенную для причинной стрелки $e_1 \rightsquigarrow e_2$. Поэтому $[\chi_{\mathbf{F}}]_e$ можно рассматривать как компоненты естественного преобразования

$$[\chi_{\mathbf{F}}] : \mathbf{Glob} \to \mathbf{\Omega}. \tag{28}$$

Заметим из (26), что если $w \in \mathbf{F}_e$, то $[\chi_{\mathbf{F}}]_e(w) = Mor_{\mathcal{C}}(\cdot, e)$. С другой стороны, если выполнено последнее равенство, то из принадлежности стрелки $e \rightsquigarrow e$ к $Mor_{\mathcal{C}}(\cdot, e)$ следует, что $w \in \mathbf{F}_e$. Таким образом, отображением $[\chi_{\mathbf{F}}]_e$ все миры из $\mathbf{F}_e$ и только они переводятся в максимальное решето на e. Это обстоятельство позволяет сделать заключение о коммутативности следующей диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F} & \xrightarrow{[\iota_{\mathbf{F}}]} & \mathbf{Glob} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle [!_{\mathbf{F}}]} & & \Big\downarrow{\scriptstyle [\chi_{\mathbf{F}}]} \\ \mathbf{1} & \xrightarrow{\top} & \boldsymbol{\Omega} \end{array} \tag{29}$$

Здесь $\mathbf{1}$ есть функтор, сопоставляющий каждому событию из $\mathcal{C}$ фиксированное одноэлементное множество $\{0\}$, а компоненты $[!_{\mathbf{F}}]_e$ естественного преобразования $[!_{\mathbf{F}}]$ есть единственно возможные отображения из $\mathbf{F}_e$ в $\{0\}$. Естественное отображение $\top$ (truth) имеет компоненты $\top_e : \{0\} \to \boldsymbol{\Omega}_e$ такие, что $\top_e(0) = Mor_{\mathcal{C}}(\cdot, e)$ – максимальное решето на e. Подфунктор $\mathbf{F}$ вместе с естественными преобразованиями $[!_{\mathbf{F}}]$ и $[\iota_{\mathbf{F}}]$ является обратным образом диаграммы $\mathbf{Glob} \xrightarrow{[\chi_{\mathbf{F}}]} \boldsymbol{\Omega} \xleftarrow{\top} \mathbf{1}$ [5].

Как уже говорилось, функтор $\mathbf{Loc}$ является наиболее простым и важным подобъектом в $\mathbf{Glob}$. Его вложению в $\mathbf{Glob}$ (4) отвечает естественное преобразование

$$[\chi_{\mathbf{Loc}}] : \mathbf{Glob} \to \boldsymbol{\Omega} \tag{30}$$

такое, что

$$[\chi_{\mathbf{Loc}}]_e(w) =_{df} \{(e' \rightsquigarrow e) \in Mor_{\mathcal{C}}(\cdot, e) : e' \in w\}. \tag{31}$$

Решето на e, определяемое правой частью этого выражения, имеет очевидный смысл обобщённого значения истинности высказывания, сделанного локализованным в e наблюдателем, о том, что его жизнь протекает в мире w. Если событие e принадлежит миру w, то правая часть (31) есть максимальное решето на e – представитель максимальной истинности, а если $Past_e \cap w = \varnothing$, то правая часть (31) есть минимальное (пустое) решето – представитель ложности высказывания. Промежуточным значениям истинности отвечают ситуации, когда только часть событий из $Past_e$ входит в мир w. Очевидно, что значение истинности данного высказывания зависит от e, т.е. от места и времени. Аналогично для любого подфунктора $\mathbf{F}$ из $\mathbf{Glob}$ решето, определяемое отображением (26), есть локальное (с точки зрения наблюдателя в e) значение истинности утверждения «w содержится в $\mathbf{F}$».

Можно взглянуть на присваивание значений истинности с несколько иной точки зрения. Мы можем локально присвоить решето на e подфунктору $\mathbf{F}$ из $\mathbf{Glob}$:

$$[S_{\mathbf{F}}]_e =_{df} \{(e' \rightsquigarrow e) \in Mor_{\mathcal{C}}(\cdot, e) : \mathbf{F}_{e'} \neq \varnothing\}. \tag{32}$$

В такой постановке локальное значение истинности (31) идентично $[S_{\mathbf{w} \wedge \mathbf{Loc}}]_e$. Здесь предпучок $\mathbf{w}$ определён так, что $\mathbf{w}_e = \{w\}$ и все причинные стрелки отображаются в тождественные отображения этого одноэлементного множества.

Сходным образом можно конструировать решёта, представляющие локальную истинность высказывания о событиях безотносительно к фиксированному миру. Например, с высказыванием наблюдателя в e «событие e_0 имеет место» естественно сопоставить решето

$$\{(e' \rightsquigarrow e) \in Mor_{\mathcal{C}}(\cdot, e) : \mathbf{Loc}_{e'} \cap \mathbf{Loc}_{e_0} \neq \varnothing\}. \tag{33}$$

Это решето задаётся выражением (32) для предпучка $\mathbf{Loc} \wedge \mathbf{Loc_{e_0}}$, где $\mathbf{Loc_{e_0}}$ является постоянным предпучком: $[\mathbf{Loc_{e_0}}]_e = \mathbf{Loc}_{e_0}$ для любого e. Легко заметить, что если e_0 совместно с e, то (33) является максимальным решетом на e. Напротив, (33) есть пустое решето, если любое событие из $Past_e$ несовместно с e_0. Промежуточным значениям истинности отвечает ситуация, когда e_0 совместно только с частью событий из $Past_e$. Поэтому утверждение имеет промежуточное значение истинности в e, если оно было абсолютно истинно для некоторых (не всех) событий из $Past_e$. В частности, как легко заметить, высказывание «событие e_0 имеет место» не будет абсолютно ложным ни в одном событии, если $\neg\mathbf{Loc} = \emptyset$, т.к. в этом случае любой мир, содержащий событие e_0, обязательно пересекается с прошлым любого другого события. Заметим также, что представителем истинности сходного утверждения в работе [2] являлось определённое корешето на e, представляющее собой совокупность причинных стрелок из e, оканчивающихся во всех общих следствиях событий e и e_0. Есть, однако, существенное различие между приведённым выше высказыванием и содержанием соответствующего высказывания из [2]. Последнее по своему смыслу ближе к утверждению «некоторое следствие события e_0 будет рано или поздно зафиксировано в памяти наблюдателя». В то же время, даже если решето (33) оказывается максимальным, нельзя в общем случае отождествлять этот факт с абсолютной истинностью последнего утверждения.

5 Заключение

Таким образом, из главных элементов модели ветвящегося пространства-времени, миров Белнапа, построен основной объект нашего подхода – контравариантный функтор $\mathbf{Glob}$ из категории, образованном причинным множеством $\mathcal{C}$ всех возможных событий, в категорию множеств Set. На подфункторах из $\mathbf{Glob}$ реализуется модель гейтингозначной логики. Стандартная конструкция классификатора подфункторов из $\mathbf{Glob}$ позволяет, как показано, строить обобщённые показатели истинности высказываний локального наблюдателя из $\mathcal{C}$. Прослеживаются параллели с подходом [2], где, как и в настоящей работе, рассмотрение ведётся с использованием элементарных понятий теории топосов. В то же время, явные отличия нашего подхода обусловлены наличием среди объектов рассмотрения, помимо событий вместе с их причинными связями, также и особых совокупностей событий – миров Белнапа. По этой причине, пустота функтора $\neg\mathbf{Loc}$ эквивалентна, как показано, некоторому нетривиальному отношению между объектами разной природы – событиями и мирами Белнапа.

В последующем в рамках развития топосного подхода к ветвящемуся пространству-времени предполагается изложить категорную конструкцию локальных ортологик, естественным образом возникающих на каждом событии из $\mathcal{C}$. Введение ортологик позволит сделать шаг к введению и анализу квантовых структур в рамках модели ветвящегося пространства-времени и в перспективе, возможно, связать классическую и квантовую концепцию многих миров.

Список литературы

[1] A. Döring and C.J. Isham, "A topos foundation for theories of physics", arXiv: quant-

ph/0703060, 0703062, 0703064, 0703066 (2007).

[2] F. Markopoulou, "The internal description of a causal set: What the univers looks like from the inside", arXiv: gr-qc/9811053 (1998).

[3] N. Belnap, "Branching space-time", *Synthese*, **92** (1992), 385.

[4] S. MacLane, "Categories for the working mathematician", Springer (1998) (Перевод: С. Маклейн. "Категории для работающего математика", М.: Физматлит (2004)).

[5] R. Goldblatt, "Topoi: The categorial analisis of logic", Nort-Holland (1979) (Перевод: Р. Голдблатт. "Топосы: Категорный анализ логики", М.: Мир (1983)).